Aix-Marseille Université

Habilitation à diriger des recherches

Discipline : Mathématiques

Analyse spectrale et stabilité inverse des opérateurs de Maxwell et de Schrödinger

Présentée par

Eric Soccorsi

Soutenue le 17 avril 2012

Après avis des rapporteurs :

Mr M. CHOULLI	Professeur	Université de Lorraine
Mr P. EXNER	Professeur	Université Technique de Prague, Rép. Tchèque
Mr A. JOYE	Professeur	Université Grenoble 1

Devant la commission d'examen composée de :

Mr P. BRIET	Professeur	Université du Sud-Toulon-Var
Mr R. BRUMMELHUIS	Professeur	Université de Londres, Royaume Uni
Mr M. CHOULLI	Professeur	Université de Lorraine
Mr P. EXNER	Professeur	Université Technique de Prague, Rép. Tchèque
Mr F. GERMINET	Professeur	Université de Cergy-Pontoise
Mr A. JOYE	Professeur	Université Grenoble 1
Mr V. ZAGREBNOV	Professeur	Aix-Marseille Université

Remerciements

Mes premiers remerciements vont évidemment à Mourad Choulli, Pavel Exner et Alain Joye, qui m'ont fait l'honneur de rapporter sur les travaux présentés dans ce mémoire. Tous trois, en dépit des nombreuses sollicitations dont ils font l'objet, ont immédiatement accepté de s'occuper de cette tâche. Je tiens à leur exprimer ma profonde gratitude pour leur accessibilité et leur disponibilité.

Les suivants vont naturellement aux trois autres membres du jury, Philippe Briet et Raymond Brummelhuis, qui ont spontanément accepté de faire partie de la commission d'examen, ainsi qu'à Valentin Zagrebnov, qui a su me suppléer avec efficacité dans les (nombreuses) démarches administratives constituant le préalable apparemment indispensable à la soutenance d'une HDR du $21^{\text{ème}}$ siècle...

Bien sûr mes remerciements ne peuvent s'en tenir aux membres du jury, tant il est naturel d'associer mes collaborateurs, qu'ils appartiennent à la communauté de la théorie spectrale ou à celle des problèmes inverses, à la sélection de travaux présentés dans ce mémoire. Bien qu'une partie importante des thèmes scientifiques que nous avons abordés ensemble ait dû effectivement sortir, pour des raisons de contingence matérielle (il s'agissait essentiellement de conserver une taille raisonnable à ce manuscrit), du périmètre forcément restreint de ce mémoire, je pense ici à Mourad Bellassoued, François Bentosela, Claude Bourrely, Philippe Briet, Jean-Michel Combes, Michel Cristofol, Yves Dermenjian, Pierre Duclos, Peter D. Hislop, Hynek Kovařík, Georgi Raikov, Pavel Stovicek et Michel Vittot. Tous méritent d'être mentionnés ici, car c'est en effet la diversité de leurs connaissances et de leurs compétences qui m'ont permis de développer mon activité de recherche, dont une partie est retranscrite dans ce mémoire, en l'orientant dans des directions nouvelles que je n'aurais probablement jamais empruntées sans leur aide.

Je veux enfin remercier Véronique Esposito et Béatrice Rolland, qui ont été une aide précieuse dans l'organisation de la soutenance de cette habilitation.

Résumé

Analyse spectrale et stabilité inverse des opérateurs de Maxwell et de Schrödinger.

Ce document est divisé en trois parties consacrées à l'étude des propriétés spectrales ou inverses des opérateurs de Maxwell et de Schrödinger.

La première partie décrit les propriétés spectrales et de transport des Hamiltoniens quantiques de Hall à un ou plusieurs bords. Ces systèmes génèrent des états quantiques qui portent un courant non nul se déplaçant le long du bord. La théorie de Mourre fournit une traduction spectrale de cette propriété, en établissant l'existence de spectre absolument continu pour l'Hamiltonien considéré dans les intervalles d'énergie correspondants.

La seconde partie présente divers aspects de l'analyse spectrale de la propagation quantique ou électromagnétique guidée : un principe d'aborption limite pour une classe très générale d'opérateurs analytiquement fibrés incluant notamment l'opérateur de Maxwell elliptique d'ordre 2, la description asymptotique du spectre discret induit par perturbation géométrique d'un guide d'onde quantique, et la caractérisation des états guidés d'opérateurs de Schrödinger bipériodiques 3D.

Le dernière partie correspond à l'étude de problèmes inverses associés aux équations de Schrödinger magnétique ou de Maxwell non stationnaires, dans des domaines bornés. L'identification unique du potentiel magnétique dans la classe de jauge de Coulomb dans le premier cas, et des coefficients électromagnétiques dans le second, à partir d'un nombre fini de mesures latérales de la solution, est établie au moyen d'une inégalité de stabilité de type Lispchitz ou Hölder. La technique utilisée repose essentiellement sur l'utilisation d'inégalités de Carleman spécifiquement adaptées à chacune des équations étudiées.

Abstract

Spectral analysis and inverse stability for Maxwell and Schrödinger operators.

This text is divided into three parts, dedicated to either spectral or inverse results on Maxwell and Schrödinger operators.

The first part deals with transport and spectral properties of quantum Hall Hamiltonians with at least one edge. These systems exhibit quantum states carrying a current flowing along the edge. Using Mourre theory, this fact can be tied to the existence of intervals of absolute continuous spectrum for the corresponding Hamiltonian.

The second part collects several mathematical results on electromagnetic and quantum guided propagation : a limiting absorption principle for a rather large class of analytically fibered operators including the second order elliptic Maxwell operator, the asymptotic distribution of eigenvalues induced by a suitable geometric perturbation of a quantum waveguide, and the characterization of the guided states of 3D biperiodic Schrödinger operators.

The last part is devoted to the study of inverse problems for the magnetic Schrödinger and the Maxwell equations, in bounded domains. The unique determination of the magnetic potential in the Coulomb gauge class in the first case, and the electromagnetic coefficients in the second one, from a finite number of boundary measurements of the solution to the above mentioned equations, is derived from a Lipschitz or Hölder type stability inequality. The method is by means of a Carleman inequality which is specifically adapted to each of the non-stationnary operators under study.

Table des matières

1 Introduction

Ce manuscrit constitue un résumé de certains des travaux que j'ai entrepris dans les domaines de l'analyse spectrale et des problèmes inverses. Tous concernent l'opérateur de Maxwell ou celui de Schrödinger, bien que certains des résultats obtenus dans ce cadre soient susceptibles de s'adapter au cas d'autres opérateurs de la physique mathématique. Ces travaux ont été regroupés autour des trois thématiques principales [1]suivantes :

a) l'étude des propriétés spectrales et de transport des Hamiltoniens de Hall quantiques, qui fait l'objet de la section 2 ;

b) l'analyse spectrale des guides d'ondes électromagnétique et quantique, à laquelle est consacrée la section 3 ;

c) l'étude de problèmes aux limites inverses associés aux opérateurs de Maxwell et de Schrödinger non stationnaires, exposée dans la section 4.

L'étude des *Hamiltoniens de Hall quantiques* est essentiellement motivée par celle de l'effet Hall quantique qui peut être décrit à l'aide de ces opérateurs. Les *systèmes quantiques de Hall* sont des domaines bidimensionnels soumis à l'action d'un champ magnétique orthogonal et constant, et qui possèdent [2]au moins un bord. Qu'il soit matérialisé par une barrière de potentiel électrique ou encore par la frontière physique du domaine considéré, ce bord confère à ces systèmes des propriétés de transport intéressantes, auxquelles la première partie de la section 2 est consacrée. En effet, l'analyse mathématique des Hamiltoniens Hall révélant la présence de courant se propageant le long du bord, il est naturel d'étudier les états quantiques qui le portent, puis d'examiner la question de sa persistance sous perturbation. La nature des perturbations à prendre en compte est aussi bien électrique que géométrique, ceci afin de modéliser l'influence d'un éventuel désordre quantique ou de la déformation du bord, sur les propriétés de transport de ces systèmes.

La seconde partie de la section 2 a, elle, pour objectif de traduire ces propriétés de transport dans le domaine spectral, en s'attachant notamment à relier, via la *théorie de Mourre*, la présence de courant le long du bord à l'existence d'une composante absolument continue dans le spectre de l'Hamiltonien de Hall correspondant. De ce point de vue, le cas d'un système à deux bords étant beaucoup plus [3]difficile à traiter que celui d'un système n'ayant qu'un seul bord, l'essentiel de l'attention a été porté à l'examen du premier cité. Dans ce contexte, le modèle de la bande quantique infinie s'impose naturellement comme le système de Hall à deux bords, et d'extension infinie, de référence. Il a fait l'objet d'une étude spectrale approfondie, décrivant le comportement de la *fonction de décalage spectral* de l'Hamiltonien de Hall défini sur cette bande munie de conditions de Dirichlet, et perturbé par un potentiel électrique décroissant à l'infini, en dehors et au voisinage des seuils mis en évidence dans le spectre.

La bande quantique de Hall infinie examinée dans la section 2 est un exemple de guide d'onde quantique bidimensionnel en interaction avec un [4]champ extérieur. A ce titre, l'analyse spectrale des Hamiltoniens de Hall qui sont définis sur cette bande a toute sa place dans la section 3. Néanmoins, dans ce modèle, la contrainte magnétique extérieure joue un rôle prépondérant, à tout le moins comparable à celui du guide, dans la

1. Evidemment, cette organisation est quelque peu arbitraire, en ce sens que certains des résultats portant sur les Hamiltoniens de Hall relèvent tout aussi bien de la thématique des guides d'onde quantique.

2. C'est tout du moins la définition qui est utilisée dans ce manuscrit.

3. En effet, dans les systèmes de Hall à un bord, l'existence de courant est équivalente à celle de spectre absolument continu. Ce n'est plus le cas pour les systèmes à deux bords. Ainsi, pour une géométrie en forme d'anneau, correspondant à un système d'extension finie à deux bords, avec conditions aux limites périodiques, certains états propres peuvent en effet porter du courant. Dans le cas de la bande quantique de Hall infinie par contre, l'équivalence mise en évidence dans le cas des systèmes à un seul bord, reste vraie.

4. Le champ magnétique constant et orthogonal à la bande quantique.

définition de ses propriétés spectrales et de transport, ce qui justifie la classification utilisée. Les résultats présentés dans la section 3 s'attachent, eux, essentiellement à décrire les conséquences spectrales du guidage sur la propagation électromagnétique ou quantique, même si, là encore, certains d'entre-eux reflètent également l'influence de perturbations de nature géométrique ou électrique sur les propriétés spectrales des opérateurs étudiés.

Portée par le développement rapide des techniques de communication, et celui des micro et nanotechnologies, l'étude mathématique de la propagation électromagnétique ou quantique guidée a connu un réel regain d'intérêt depuis une trentaine d'années. Ceci s'explique aussi par le fait que le guidage peut changer profondément la nature spectrale, et donc la dynamique, des opérateurs de Maxwell ou de Schrödinger associés. Cet effet est du reste également mis en évidence dans le contexte de la section 2, où le spectre purement ponctuel de l'oscillateur harmonique dans $\mathbb{R}^2$ devient absolument continu lorsque ce même opérateur est défini dans une bande bidimensionnelle infinie. Le premier résultat décrit dans la section 3 est un *principe d'absorption limite* (en dehors et au voisinage des seuils du spectre) pour l'opérateur de Maxwell hétérogène dans un guide stratifié, modélisant une fibre optique. Le second traite de l'influence de la [5]torsion sur le spectre ponctuel du Laplacien de Dirichlet défini dans un guide d'onde tridimensionnel. Toute modification convenable d'une torsion constante et non nulle crée en effet, sous réserve que la section du tube ne soit pas cylindrique, un nombre infini de valeurs propres dont le taux d'accumulation en deça de l'infimum du spectre essentiel peut être explicitement décrit. Enfin, le dernier résultat est une caractérisation des [6]modes guidés d'un Hamiltonien tridimensionnel générés par guidage bipériodique.

Par opposition aux problèmes dits "directs" considérés dans les sections 2-3, les *problèmes inverses* associés à un système régi par une équation aux dérivées partielles (notée EDP en abrégé dans la suite) consistent généralement à identifier un ou plusieurs [7]paramètres de cette équation, à partir de certaines informations portant sur l'état du système étudié, et appelées *observations* ou *données* dans la suite. Ces dernières peuvent être, par exemple, de nature spectrale, auquel cas on parle de *problème inverse spectral*, ou bien porter sur la solution du problème aux limites associé à l'EDP sous-jacente, ce qui caractérise alors un *problème inverse aux limites*. Les problèmes inverses présentés dans la section 4 appartenant tous à la seconde catégorie, la suite de cette introduction concernera donc essentiellement les problèmes inverses aux limites. Ceux-ci poursuivent généralement trois objectifs de difficulté croissante et désignés par les termes *unicité*, *stabilité* et *reconstruction*. La propriété d'unicité, qui traduit simplement l'injectivité de la relation naturelle associant les paramètres à identifier aux données, est, dans les faits, l'objet de la majeure partie des publications mathématiques traitant des problèmes inverses. Ceci est d'ailleurs particulièrement vrai pour les problèmes inverses spectraux. Mais dans certains cas, l'unicité peut être associée à une propriété supplémentaire dite "de stabilité", traduisant la dépendance stable des paramètres inconnus par rapport aux observations. Cette propriété s'exprime au moyen d'une *inégalité de stabilité* bornant supérieurement toute [8]variation des paramètres à identifier par une [9]fonction de la [10]perturbation ainsi induite sur les observations. Si une telle estimation implique évidemment l'unicité, elle permet aussi parfois, comme cela est indiqué dans [72], d'élaborer une [11]procédure d'approximation numérique des coefficients à identifier, ce qui garantit *in fine* leur reconstruction. Il convient néanmoins de noter avec [84] que la mise en place d'une inégalité

5. Cette étude s'inscrit donc dans le cadre assez général de la géométrie spectrale des guides d'ondes, qui est l'objet d'un très vif intérêt depuis la publication de l'article "fondateur" [33] en 1995.

6. Aussi appelés "ondes de surface" par certains auteurs.

7. Ce qui inclut les coefficients et autres termes source, ainsi que, le cas échéant, l'état initial du système.

8. Mesurée au sens d'une certaine norme sur l'ensemble des paramètres admissibles.

9. Qui est généralement lipschitzienne ou höldérienne, voire, dans certains cas, logarithmique.

10. Mesurée au sens de la norme la plus faible possible.

11. En procédant par exemple par minorations successives du majorant dans l'inégalité de stabilité, lorsque celle-ci est uniforme par rapport à la classe des coefficients à déterminer.

de stabilité n'est pas toujours nécessaire à la reconstruction numérique effective de paramètres inconnus.

Différentes techniques sont disponibles pour établir une inégalité de stabilité. L'une d'entre-elles fait appel aux *inégalités de Carleman*, qui, bien qu'ayant été initialement introduites pour un tout autre [12]objectif, se sont imposées, depuis la parution de [19] par Bukhgeim et Klibanov en 1981, comme un outil incontournable pour l'identification d'un ou plusieurs coefficients inconnus à partir d'un nombre fini d'observations. Si les estimations de Carleman ont été largement utilisées depuis cette date dans l'analyse des problèmes inverses paraboliques, et dans une moindre mesure, hyperboliques, il n'existe, de façon assez surprenante, qu'un très petit nombre de publications mathématiques traitant de problémes inverses associés aux équations de Maxwell ou de Schrödinger avec cette méthode. Les résultats présentés dans la section 4 corrigent quelque peu ce déséquilibre en établissant la stabilité (höldérienne au minimum) dans l'identification de la partie principale des opérateurs de Maxwell et de Schrödinger non stationnaires, à partir de la mesure d'un nombre fini d'observations latérales. Leur démonstration s'appuie évidemment sur l'établissement d'une inégalité de Carleman adaptée à chacun des systèmes étudiés.

12. Essentiellement la justification d'un principe de prolongement unique dans certains problèmes de Cauchy hyperboliques.

2 Analyse spectrale des Hamiltoniens quantiques de Hall

2.1 Effet Hall quantique et "approximation à une particule"

L'*effet Hall quantique entier* (désigné en abrégé par EHQE dans la suite), qui a été mis en évidence en 1980 par le physicien allemand K. von Klitzing (voir [93]), apparaît à basse température dans un gaz [13]idéal piégé dans un échantillon bidimensionnel soumis à un intense champ magnétique perpendiculaire et constant. Sous ces conditions, l'application d'un champ électrique dans la direction x induit un courant, appelé courant de Hall, se déplaçant parallèlement à la direction y. La *conductivité de Hall* est alors quantifiée et s'écrit $\sigma_{xy} = \nu e^2/h$, e désignant la charge élémentaire, h la constante de Planck, et $\nu \in \mathbb{N}^*$ le "facteur de remplissage".

Les *courants de bord*, ainsi nommés car ils apparaissent au voisinage de la frontière des systèmes de Hall, sont une part importante de l'explication mathématique de l'EHQE (voir [9, 23, 34, 61]). Il est désormais établi que la conductivité associée à ces courants de bord, appelée [14]*conductivité de bord*, est également quantifiée. Bien que relativement simple à définir, le modèle adéquat permettant d'expliquer l'origine et d'étudier les propriétés de ces courants de bord est donc, au vu de ce qui précède, celui dit de "l'approximation à une particule". De ce fait, ce sont les propriétés spectrales et de transport de ce "modèle à une particule", introduit dans la section 2.1.1, qui font l'objet de la suite de cette section.

2.1.1 Hamiltoniens de Hall

L'Hamiltonien de Landau $H_L(b)$ décrit le comportement d'une particule chargée se déplaçant dans $\mathbb{R}^2$ et soumise à un champ magnétique orthogonal et constant d'intensité $b \geq 0$. Il est défini sur le domaine dense $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2) \subset \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ par

$$H_L(b) = (-\imath\nabla - A)^2 = -\partial_x^2 + (\imath\partial_y + bx)^2, \tag{1}$$

dans la jauge de Landau, qui correspond au potentiel magnétique $A(x, y) = (0, bx)$. C'est un opérateur essentiellement autoadjoint dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ dont le spectre est purement ponctuel, $\sigma(H_L(b)) = \{\mathfrak{e}_n(b) = (2n-1)b,\ n \in \mathbb{N}^*\}$, chaque valeur propre $\mathfrak{e}_n(b)$, appelée $n^{\text{ième}}$ *niveau de Landau*, étant infiniment dégénérée.

Le spectre de $H_L(b)$ perturbé par un potentiel aléatoire de type Anderson V_ω dans le régime de faible désordre, correspondant dans ce contexte à $\|V_\omega\|_\infty = 0(b)$, a été étudié dans [25, 30, 54, 95]. Il y est prouvé qu'en dehors d'un petit intervalle de taille $b/\log b$ et centré aux différents niveaux de Landau, $H_\omega = H_L(b) + V_\omega$ possède des intervalles de spectre purement ponctuel associé à des fonctions propres exponentiellement décroissantes. Quant à la nature du spectre au voisinage des niveaux de Landau, elle n'est pas clairement [15]identifiée. Tout système quantique de Hall permettant de mettre en évidence l'EFQH, qu'il soit défini sur un domaine du plan d'extension finie ou non, possède au moins un bord (matérialisé par la frontière du domaine considéré ou par une barrière de potentiel électrique). Dans ce cas l'Hamiltonien décrivant l'évolution de ce système est un opérateur positif et autoadjoint dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$, de la forme

$$H_0 = H_L(b) + V_0,$$

13. Donc sans interaction. Ce qui justifie l'emploi de l'approximation à une particule, définie plus bas, dans l'étude de l'EHQE.

14. Pour une étude détaillée des liens existant entre courants et conductivité de bord, se reporter par exemple à [23, 24, 34, 35, 62, 63, 85].

15. Même si, pour la version discrète de ce modèle définie sur le réseau $\mathbb{Z}^2$, [31] permet d'associer une constante $b_N > 0$ à chaque entier $N \in \mathbb{N}^*$, telle que le spectre de H_ω en deça du $N^{\text{ième}}$ niveau de Landau est presque surement purement ponctuel si $b > b_N$.

où $V_0 \geq 0$ désigne un potentiel électrique confinant, modélisant le bord du domaine (on considèrera également le cas de condition au bord de type Dirichlet). La présence d'un tel bord modifie radicalement la nature spectrale ainsi que les propriétés de transport du système. Dans le cas de bords droits, c'est-à-dire lorsque $V_0(x,y) = V_0(x)$, l'étude de H_0 se ramène à celle d'un système unidimensionnel puisque $\mathcal{F}_y H_0 \mathcal{F}_y^* = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} h_0(k) \mathrm{d}k$, où $\mathcal{F}_y$ désigne la transformation de Fourier partielle dans la direction y, et

$$h_0(k) = -\partial_x^2 + (k - bx)^2 + V_0(x) \text{ dans } \mathrm{L}^2(\mathbb{R}),\ k \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Pour tout $k \in \mathbb{R}$, le spectre de $h_0(k)$ est discret et simple, et l'on note $\{E_r(k),\ r \in \mathbb{N}^*\}$ la suite croissante de ses valeurs propres. Comme H_0 est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication par la famille de fonctions $\{E_r,\ r \in \mathbb{N}^*\}$, c'est de l'étude de cette famille de *courbes de dispersion* que découlent les principales propriétés spectrales et de transport des systèmes quantiques de Hall à bords droits détaillées ci-après. Le cas de bords "non droits" plus généraux peut ensuite être traité à partir du précédent à l'aide de la théorie perturbative.

2.1.2 Modèles à un ou deux bords

La quantification de la conductivité de Hall des systèmes planaires en l'absence de confinement a été prouvée dans [9] pour les modèles discrets définis sur un réseau, et dans [2, 69] pour les modèles continus définis sur $\mathbb{R}^2$, sous des conditions diverses. Pour les géométries à un bord, on peut définir mathématiquement une conductivité de bord associée aux courants de bord définis dans la section 2.2. Voici comment. Pour $b > a \in \mathbb{R}$, une fonction [16] "switch" $\eta_{[a,b]}$ est une fonction décroissante à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, dérivable, vérifiant $\eta_{[a,b]}(s) = 1$ pour $s < a$, $\eta_{[a,b]}(s) = 0$ pour $s > b$, et telle que supp $\eta'_{[a,b]} \subset [a,b]$. Soit $\chi(x,y) = \chi(y)$ une fonction "switch", invariante dans la direction x, associée à $[a,b] = [-1/2, 1/2]$. Pour le demi-plan $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ modélisé par un Hamiltonien H, la conductivité de bord associée à l'intervalle d'énergie $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est définie par $\sigma_e([a,b]) = -\mathrm{Tr}(\eta'_{[a,b]}(H)\imath[H,\chi])$. Cette quantité est bien définie et indépendante du choix des fonctions η et χ. Il est également possible de définir la [17]conductivité de Hall σ_H pour le demi-plan $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ à partir de la formule de Kubo. C'est cette quantité qui est quantifiée, y compris dans le cas du demi-plan. Le principal résultat sur la conductivité de bord σ_e est l'égalité $\sigma_e = \sigma_H$ [23, 34, 85], impliquant la quantification de la conductivité de bord.

La conductivité de bord des systèmes planaires à deux bords est définie de manière similaire. Un calcul simple basé sur la décomposition en intégrale directe (2) et la [18]formule de Feynman-Hellmann, [19]montre que $\sigma_e = 0$ pour l'Hamiltonien non perturbé H_0. Il est prouvé dans [23] que ce résultat reste vrai pour l'Hamiltonien perturbé $H_1 = H_0 + V_1$ pour une grande variété de potentiels V_1. L'explication simplifiée de ce phénomème est qu'en dépit de la mixion des courants de bord droit et gauche sous l'effet de la perturbation V_1, la conductivité totale reste inchangée, car ces courants, qui ne sont d'ailleurs pas forcément bien localisés, ont des directions opposées leur permettant de se compenser.

2.1.3 Modèles effectifs

Le cas de systèmes à un bord (resp. deux bords) peut être modélisé par une barrière de potentiel de la forme

$$V_0(x,y) = gV_0^{(1)}(x) = g(1 - \chi_{\mathbb{R}_+}(x)) \text{ (resp. } V_0(x,y) = gV_0^{(2)}(x) = g(1 - \chi_{I_\ell}(x))), \tag{3}$$

16. Pour reprendre la terminologie "switch function" introduite dans [34].

17. Appelée "bulk conductance" en anglais.

18. En fait, l'identité $\partial_k E_r(k) = -2\int_{\mathbb{R}}(bx - k)\psi_r(x;k)^2 \mathrm{d}x$, $\psi_r(.;k)$ désignant une fonction propre normalisée, associée à $h_0(k)$ et $E_r(k)$.

19. Sous certaines hypothèses "raisonnables", incluant notamment le fait que l'intervalle spectral considéré soit dominé par le confinement

où $g > 0$, χ_I désigne la fonction caractéristique de n'importe quel sous-ensemble $I \subset \mathbb{R}$ et $I_\ell = (-\ell, \ell)$, et $\ell > 0$. Comme on le verra dans la suite, le cas des conditions au bord de type Dirichlet s'obtient en faisant tendre g vers l'infini dans (3).
On note $H_{0,g}^{(j)}$, $j = 1, 2$, l'Hamiltonien quantique (1) associé à $gV_0^{(j)}$, $h_{0,g}^{(j)}(k)$ l'opérateur de fibre (2) correspondant, et $E_{n,g}^{(j)}(k)$ sa $n^{\text{ième}}$ valeur propre pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Dans la suite, $\{\psi_{n,g}^{(j)}(k),\ n \in \mathbb{N}^*\}$, $j = 1, 2$, désigne une famille orthonormale dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ de fonctions propres à valeurs réelles de $h_{0,g}^{(j)}(k)$, $k \in \mathbb{R}$:

$$h_{0,g}^{(j)}(k)\psi_{n,g}^{(j)}(k) = E_{n,g}^{(j)}(k)\psi_{n,g}^{(j)}(k),\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{4}$$

Courbes de dispersion, seuils. Pour tout $j = 1, 2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $k \mapsto E_{n,g}^{(j)}(k) \in [\mathfrak{e}_n(b), \mathfrak{e}_n(b) + g)$ est simple et analytique réelle. Dans le cas à un bord, le théorème de Feynman-Hellmann impose $\partial_k E_{n,g}^{(1)}(k) = -(g/b)\psi_{n,g}^{(1)}(0; k)^2$, de sorte que la fonction $k \mapsto E_{n,g}^{(1)}(k)$ est strictement décroissante. De plus, elle satisfait

$$\lim_{k \to -\infty} E_{n,g}^{(1)}(k) = \mathfrak{e}_n(b) + g,\ \lim_{k \to +\infty} E_{n,g}^{(1)}(k) = \mathfrak{e}_n(b), \tag{5}$$

alors que dans le cas d'une bande infinie, $k \mapsto E_{n,g}^{(2)}(k)$ est une fonction paire, vérifiant

$$\lim_{k \to \pm\infty} E_{n,g}^{(2)}(k) = \mathfrak{e}_n(b) + g.$$

La monotonie éventuelle de $k \mapsto E_{n,g}^{(2)}(k)$ sur $\mathbb{R}_+$ est toujours un problème ouvert, sauf pour le cas $n = 1$, qui est traité dans la section 2.1.4. Le spectre de $H_{0,g}^{(j)}$, $j = 1, 2$, est donc absolument continu, et $\sigma(H_{0,g}^{(j)}) = \overline{\cup_{n \geq 1}[\mathcal{E}_{n,g}^{(j)}, \mathfrak{e}_n(b) + g)}$, où $\mathcal{E}_{n,g}^{(j)} = \inf_{k \in \mathbb{R}} E_{n,g}^{(j)}(k)$ est le $n^{\text{ième}}$ *seuil* dans $\sigma(H_{0,g}^{(j)})$. En fait, $\mathcal{E}_{n,g}^{(1)} = \mathfrak{e}_n(b)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en vertu de (5) et de la monotonie de $k \mapsto \mathcal{E}_{n,g}^{(1)}(k)$, et $\mathcal{E}_{n,g}^{(2)}$ peut être rendu arbitrairement proche de $\mathfrak{e}_n(b)$ d'après [58, Lemme 5.3] : pour tous $b > 0$ et $g > 0$, il existe en effet deux constantes $\alpha_n > 0$ et $\mu_n > 0$ indépendantes de g et b satisfaisant $0 \leq \mathcal{E}_{n,g}^{(2)} - \mathfrak{e}_n(b) \leq \alpha_n b \mathrm{e}^{-\mu_n b \ell^2}$ dès que $b\ell^2 > 1$.

Borne inférieure de la vitesse. Eu égard à ce qui précède, et quitte à choisir $b\ell^2$ suffisamment grand lorsque $j = 2$,

$$\Delta_n = ((2(n-1) + a)b, (2(n-1) + c)b),\ 1 < a < c < 3,\ n \in \mathbb{N}^*, \tag{6}$$

est donc un sous-intervalle de $(\mathcal{E}_{n,g}^{(j)}, \mathcal{E}_{n+1,g}^{(j)})$, $j = 1, 2$. Pour un tel intervalle, il résulte de [57, Lemme 2.3] dans le cas $j = 1$, et de [58, Lemme 2.2] si $j = 2$, en procédant par comparaison des fonctions propres de $h_{0,g}^{(j)}(k)$ à celles de l'oscillateur harmonique $h_{0,g}^{(j)}(k) - gV_0^{(j)}$, que $\partial_k E_{r,g}^{(j)} \chi_{(E_{r,g}^{(j)})^{-1}(\Delta_n)}$, $r = 1, \ldots, n$, est inférieurement bornée par une quantité $O(b^{1/2})$. Plus exactement, il existe une constante $c_n > 0$, ne dépendant que de n, vérifiant pour tout $b > 0$ et $g > \mathfrak{e}_{n+1}(b)$, l'estimation suivante :

$$-\partial_k E_{r,g}^{(1)}(k) \geq c_n (a-1)^2 (3-c)^3 b^{1/2},\ k \in (E_{r,g}^{(1)})^{-1}(\Delta_n),\ r = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Dans le cas de la bande infinie et sous les mêmes conditions que ci-dessus, il existe de plus, une constante $\theta_n(a) > 0$, ne dépendant que de n et a, pour laquelle on a

$$\partial_k E_{r,g}^{(2)}(k) \geq c_n (a-1)^2 (3-c)^3 b^{1/2},\ k \in (E_{r,g}^{(2)})^{-1}(\Delta_n) \cap \mathbb{R}_+,\ r = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

si $b\ell^2 > \theta_n(a)$.

2.1.4 Monotonie du niveau fondamental de la bande infinie

La constante g étant fixée dans $\mathbb{R}_+^*$, on rappelle que la fonction $k \mapsto E_{1,g}^{(2)}(k)$ est analytique et paire, de sorte que $E_{1,g}(0) = 0$. L'objet de cette section 2.1.4 est de justifier l'inégalité

$$\pm\partial_k E_{1,g}^{(2)}(k) > 0, \ \pm k > 0. \tag{9}$$

Afin d'alléger les notations on convient d'écrire E_1 (resp. ψ_1, V_0) dans toute la section 2.1.4 à la place de $E_{1,g}^{(2)}$ (resp. $\psi_{1,g}^{(2)}$, $V_0^{(2)}$), puis l'on commence par remarquer que :

$$E_1(k) - k^2 \leq E_1(0), \ k \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

En effet, on a

$$E_1(k) = \inf_{0 \neq \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})} \Phi(\psi) \text{ avec } \Phi(\psi) = \frac{\int_{\mathbb{R}} (\psi'^2 + ((bx+k)^2 + gV_0(x))\psi^2) \mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}} \psi^2 \mathrm{d}x},$$

d'après le principe du min-max, ce qui implique $E_1(k) \leq \Phi(\psi_1(\cdot;0))$. Or, $\psi_1(\cdot;0)$ étant une fonction paire, on a $\int_{\mathbb{R}} x\psi_1(x;0)^2 \mathrm{d}x = 0$, et donc $\Phi(\psi_1(\cdot;0)) = E_1(0) + k^2$.
Soit maintenant $k \neq 0$. D'après le théorème de Feynman-Hellman on sait que

$$E_1'(k) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial (bx-k)^2}{\partial k} \psi_1(x;k)^2 \mathrm{d}x. \tag{11}$$

Ensuite, tenant en compte les deux identités $\partial_k(bx-k)^2 = -(1/b)\partial_x(bx-k)^2$ et

$$(bx-k)^2\psi_1(x;k) = \partial_x^2\psi_1(x;k) + (E_1(k) - gV_0(x))\psi_1(x;k), \tag{12}$$

il vient immédiatement que $E_1'(k) = -2(\alpha/b)(\psi_1(L;k)^2 - \psi_1(-L;k)^2)$ en intégrant par parties dans (11). Comme $\psi_1(x;k) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la condition $E_1'(k) = 0$ est donc équivalente à

$$\psi_1(L;k) = \psi_1(-L;k). \tag{13}$$

Soient $f_\pm(x) = f_\pm(x;k) = (\psi_1(x;k) \pm \psi_1(-x;k))/2$ les parties paire et impaire de la fonction $\psi_1(.;k)$. On a facilement que

$$-f_-'' + (b^2x^2 + k^2 + gV_0(x) - E_1(k))f_- = 2bkxf_+, \ x \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

De plus, (13) impose

$$f_-(L) = 0, \tag{15}$$

et comme f_- est continue et impaire sur $\mathbb{R}$, alors

$$f_-(0) = 0. \tag{16}$$

Finalement (13) entraîne

$$f_-'(L) = \frac{2bk}{\psi_1(L;k)} \int_L^\infty t\psi_1(t;k)\psi_1(-t;k)\mathrm{d}t. \tag{17}$$

En effet, comme V_0 est paire, l'équation (12) implique

$$\partial_x^2\psi_1(x;k)\psi_1(-x;k) - \psi_1(x;k)\partial_x^2\psi_1(-x;k) = 4bkx\psi_1(x;k)\psi_1(-x;k), \ x \in \mathbb{R}.$$

De plus, la partie gauche de cette égalité étant la dérivée de $\partial_x\psi_1(x;k)\psi_1(-x;k) + \psi_1(x;k)\partial_x\psi_1(-x;k)$, on obtient que

$$\partial_x\psi_1(L;k)\psi_1(-L;k) + \psi_1(L;k)\partial_x\psi_1(-L;k) = 4bkx\int_L^\infty \psi_1(x;k)\psi_1(-x;k)\mathrm{d}x,$$

en intégrant sur $(L, +\infty)$. On obtient ainsi (17) directement à partir de l'égalité précédente et de (13).

Résolvons maintenant (14) dans $(0, L)$. Notons pour cela u_1 et u_2 les solutions (elles sont analytiques réelles) sur $\mathbb{R}$ des problèmes de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1'' = (b^2x^2 + k^2 - E_1(k))u_1 \\ u_1(0) = 1, u_1'(0) = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_2'' = (b^2x^2 + k^2 - E_1(k))u_2 \\ u_2(0) = 0, u_2'(0) = 1. \end{array} \right.$$

La méthode standard de "variation des constantes" établit alors que la solution générale de (14) s'écrit

$$f_-(x) = 2bk \left(u_1(x) \int_x^L tfu_2 \mathrm{d}t - u_2(x) \int_x^L tfu_1 \mathrm{d}t \right) + c_1u_1(x) + c_2u_2(x),\ x \in (0, L),$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires. Comme le Wronskien des fonctions u_1 et u_2 ne s'annule jamais, les conditions (15) et (17) donnent $c_1 = 2bk \int_L^\infty t\psi_1(t;k)\psi_1(-t;k)\mathrm{d}t$. Ensuite, la condition (16) et l'hypothèse $k \neq 0$ entraînent

$$\int_L^{+\infty} t\psi_1(t;k)\psi_1(-t;k)\mathrm{d}t + \int_0^L tf(t;k)u_2(t;k)\mathrm{d}t = 0. \tag{18}$$

Pour montrer que $E_1'(k) \neq 0$ pour $k \neq 0$, il suffit donc de vérifier que

$$u_2(x;k) > 0,\ x \in (0, L], \tag{19}$$

ce qui, combiné au fait que $f_+(x;k) > 0$ pour tout $x \in [0, L)$, est en contradiction avec (18). Soit $\mathcal{E}_1$ la première valeur propre de l'opérateur $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + b^2x^2$ de domaine $\left\{u \in \mathrm{H}^2(0, L) | u(0) = u(L) = 0\right\}$, et soit φ une fonction propre associée, strictement positive sur $(0, L)$. Il résulte facilement du principe du min-max que $E_1(0) < \mathcal{E}_1$, ce qui, à la lumière de (10), entraîne

$$b^2x^2 - \mathcal{E}_1 < b^2x^2 + k^2 - E_1(k),\ x \in (0, L).$$

S'il existait $x_0 \in (0, L]$ tel que $u_2(x_0;k) = 0$, alors le théorème d'oscillations de Sturm [13, Chapitre 2, Théorème 3.2] impliquerait l'existence de $x_1 \in (0, x_0)$ satisfaisant $\varphi(x_1) = 0$, ce qui est impossible. Ainsi (19) est vraie car $u_2'(0) = 1$, et donc $E_1(k) \neq 0$ si $k \neq 0$. Ceci achève la démonstration de (9).

2.2 Etats et courants de bord

Un état $\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ est considéré comme portant un *courant de bord* $J_y(\psi)$ si

$$J_y(\psi) = |\langle V_y\psi, \psi\rangle| > 0,$$

la quantité $V_y = -\imath\partial_y - bx$ désignant la seconde composante de la [20]vélocité et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Dans ce cas ψ est appelé *état de bord*, la terminologie employée étant justifiée, comme on le verra, par le fait qu'un tel état est nécessairement localisé au voisinage du bord modélisé par le potentiel électrostatique V_0. On s'intéresse ici à des états ψ dont l'énergie est localisée dans des intervalles situés entre deux seuils consécutifs de $H_{0,g}^{(j)}$, avec $j = 1$ ou 2, suivant que l'on examine le cas du demi-plan ou celui de la bande infinie. Quitte à se resteindre à des sous intervalles spectraux suffisamment petits, il est possible d'analyser l'influence de chacune des courbes de dispersion sur les propriétés spectrales et de transport du système considéré, de façon indépendante de celle

20. En d'autres termes, le courant porté par ψ est la trace de $\rho_\psi V_y$ associée à la *matrice densité* $\rho_\psi = |\psi >< \psi|$ définie par $\rho_\psi u = \langle u, \psi\rangle\psi$ pour tout $u \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$.

des autres. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe en effet, en vertu de [57, Lemme 2.1] pour le cas $j = 1$, et de [58, Lemme 2.1] pour $j = 2$, une distance caractéristique $\delta_n = \delta_n(b, g) > 0$ à partir de laquelle tout sous-intervalle $\Delta_n \subset (\mathcal{E}_{n,g}^{(j)}, \mathcal{E}_{n+1,g}^{(j)})$ obéissant à $|\Delta_n| < \delta_n$, vérifie simultanément

$$(E_{r,g}^{(j)})^{-1}(\Delta_n) = \emptyset,\ r \geq n+1, \tag{20}$$

et

$$(E_{r,g}^{(j)})^{-1}(\Delta_n) \cap (E_{s,g}^{(j)})^{-1}(\Delta_n) = \emptyset,\ r \neq s,\ r, s = 1, \ldots, n. \tag{21}$$

Considérons maintenant un état ψ satisfaisant $\psi = \mathbb{P}_{0,g}^{(j)}(\Delta_n)\psi$, $j = 1, 2$, où $\mathbb{P}_{0,g}^{(j)}(I)$ désigne le projecteur spectral de $H_{0,g}^{(j)}$ associé à n'importe quel sous-ensemble borélien $I \subset \mathbb{R}$. Sous réserve que Δ_n satisfasse les conditions (20)-(21), ψ s'écrit

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{r=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\imath k y} \chi_{(E_{r,g}^{(j)})^{-1}(\Delta_n)}(k) \beta_r(k) \psi_{r,g}^{(1)}(x; k) \mathrm{d}k, \tag{22}$$

où $\beta_r(k) = \langle \hat{\psi}(.; k), \psi_{r,g}^{(j)}(.; k) \rangle$, $r = 1, \ldots, n$, et $\hat{\psi} = \mathcal{F}_y \psi$, de sorte que l'on a :

$$\langle V_y \psi, \psi \rangle = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \int_{(E_{r,g}^{(j)})^{-1}(\Delta_n)} |\beta_r(k)|^2 \partial_k E_{r,g}^{(j)}(k) \mathrm{d}k. \tag{23}$$

Commençons par examiner le cas du modèle à un bord, celui à deux bords étant traité dans la section 2.2.2.

2.2.1 Cas du demi-plan

Estimation du courant en l'absence d'impuretés. A la lumière de (23) et de la normalisation $\|\psi\|^2 = \sum_{r=1}^{n} \int_{(E_{r,g}^{(1)})^{-1}(\Delta_n)} |\beta_r(k)|^2 \partial_k E_{r,g}^{(1)}(k) \mathrm{d}k$, il suffit donc d'assurer

$$\min_{1 \leq r \leq n} \inf_{k \in (E_{r,g}^{(1)})^{-1}(\Delta_n)} (-\partial_k E_{r,g}^{(1)}(k)) > 0,$$

pour que ψ porte effectivement un courant. Compte tenu de (7), ceci entraîne le :

Théorème 1. *([57, Corollaire 2.1]) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $b > 0$, $g > \mathfrak{e}_{n+1}(b)$, et Δ_n, défini par* (6)*, et satisfaisant* (20)-(21)*. Alors, n'importe quel état $\psi = \mathbb{P}_{0,g}^{(1)}(\Delta_n)\psi \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ vérifie*

$$J_y(\psi) = -\langle \psi, V_y \psi \rangle \geq c_n (a-1)^2 (3-c)^2 b^{1/2} \|\psi\|^2, \tag{24}$$

la constante $c_n > 0$, ne dépendant que de n, étant celle de (7)*.*

Avant d'examiner la stabilité sous perturbation du courant porté par ψ, il convient de remarquer à la lumière de l'inégalité

$$J_y(\psi) = |\langle V_y \psi, \psi \rangle| \leq \|V_y \psi\| \|\psi\| \leq \|H_{0,g}^{(1)} \psi\| \|\psi\| \leq \mathfrak{e}_{n+1}(b)^{1/2} \|\psi\|^2,$$

que l'estimation (24) est optimale relativement à son ordre par rapport à b.

Stabilité du courant sous perturbation. Considérons maintenant la perturbation de H_0 par un potentiel borné V_1. Nous allons voir que la borne inférieure établie au Théorème 1 est stable par rapport à cette perturbation, pour peu que $\|V_1\|_\infty / b$ soit assez petit. Pour cela, étant donné Δ_n défini par (6), on considère un sous-intervalle $\tilde{\Delta}_n$ de Δ_n, de même milieu $E = (2(n-1) + (a+c)/2)b$. L'idée est d'estimer $J_y(\psi)$ pour des états $\psi \in \mathbb{P}_{1,g}^{(1)}(\tilde{\Delta}_n)\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$, où $\mathbb{P}_{1,g}^{(1)}$ désigne la famille spectrale de l'Hamiltonien perturbé $H_{1,g}^{(1)} = H_{0,g}^{(1)} + V_1$, qui sont assez "proches" de $\mathbb{P}_{0,g}^{(1)}(\Delta_n)\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Cette proximité peut être mesurée, à partir d'un calcul perturbatif standard, à l'aide de la constante κ du membre de gauche de l'inégalité (25) détaillée ci-après. Dans un premier temps, $b > 0$ et $g > \mathfrak{e}_{n+1}(b)$ étant fixés, on choisit Δ_n assez petit afin que $|\Delta_n| < \delta_n$, et donc que l'estimation du Théorème 1 soit vraie pour tous les états de $\mathbb{P}_{0,g}^{(1)}(\Delta_n)\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$, et en particulier pour $\Phi = \mathbb{P}_{0,g}^{(1)}(\Delta_n)\psi$. Un calcul perturbatif simple établit ensuite que $\|\Phi\| \geq \kappa\|\psi\|$ sous réserve que $|\tilde{\Delta}_n|$ et $\|V_1\|_\infty$ sont suffisamment petits devant $|\Delta_n|$ afin que

$$\kappa^2 = 1 - \left(\frac{|\tilde{\Delta}_n| + 2\|V_1\|_\infty}{|\Delta_n|} \right)^2 > 0. \tag{25}$$

Ceci entraîne, via le Théorème 1, que $\langle \Phi, V_y \Phi \rangle \geq c_n (a-1)^2 (3-c)^3 \kappa^2 b^{1/2} \|\psi\|^2$. L'estimation du courant $\langle \psi, V_y \psi \rangle$ s'obtient à partir de l'inégalité précédente en exerçant un contrôle approprié sur le terme correctif $2\mathrm{Re}\,(\langle \Phi, V_y \xi \rangle) + \langle \xi, V_y \xi \rangle$, où $\xi = \mathbb{P}_{0,g}^{(1)}(\mathbb{R} \setminus \Delta_n)\psi = \psi - \Phi$. La condition requise pour cela est que $|\tilde{\Delta}_n|$ et $\|V_1\|_\infty$ soient suffisamment petits devant $|\Delta_n|$, de sorte notamment que l'intervalle Δ_n soit inclus dans le "gap" spectral de $H_L(b) + V_1$ dans $(\mathfrak{e}_n(b), \mathfrak{e}_{n+1}(b))$:

$$\Delta_n \subset \rho(H_L(b) + V_1) \cap (\mathfrak{e}_n(b), \mathfrak{e}_{n+1}(b)). \tag{26}$$

Théorème 2. *([57, Théorème 2.3]) Soient $b > 0$, Δ_n, $n \in \mathbb{N}^*$, donné par* (6) *et obéissant à* (20)-(21), *$\tilde{\Delta}_n \subset \Delta_n$ ayant même milieu que Δ_n, et $V_1 \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Si $|\tilde{\Delta}_n|$ et $\|V_1\|_\infty$ sont suffisamment petits devant $|\Delta_n|$ alors il existe une constante $\tilde{c}_n > 0$, indépendante de b, telle que*

$$J_y(\psi) \geq \tilde{c}_n \kappa^2 b^{1/2} \|\psi\|^2, \tag{27}$$

pour tout $\psi \in \mathbb{P}_{1,g}^{(1)}(\tilde{\Delta}_n)\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ et $g > \mathfrak{e}_{n+1}(b)$.

Si la distance du milieu E de $\tilde{\Delta}_n$ à $\mathbb{R} \setminus \Delta_n$ n'est pas plus petite que δ_n, il est possible de choisir un intervalle Δ_n dont la largeur est de l'ordre de δ_n. Dans ce cas, tout état $\psi = \mathbb{P}_{1,g}^{(1)}(\tilde{\Delta}_n)\psi$ satisfaisant les hypothèses du Théorème 2 porte un courant d'intensité $O(b^{1/2})$ pour peu que $(\|V_1\|_\infty + |\tilde{\Delta}_n|)/\delta_n$ soit assez petit. Dans le cas où $\delta_n = O(b)$, ceci indique que le courant de bord subsiste en présence de perturbations V_1 suffisamment petites devant b. La remarque précédente reste vraie si l'on suppose par exemple que le support de V_1 est suffisamment éloigné du bord, afin d'en limiter l'action sur les états de bord. Dans ce cadre, il est prouvé dans [26, Section 6] (avec une technique similaire à celle utilisée dans la démonstration du Théorème 4) que le courant persiste avec la même intensité $O(b^{1/2})$ même si $\|V_1\|_\infty \gg b$.

Localisation du courant. Sous les conditions du Théorème 1, l'extérieur de la bande $\omega_b = (0, b^{-1/2}) \times \mathbb{R}$ est situé dans la zone classiquement interdite du potentiel harmonique $x \mapsto (bx - k)^2$ pour tout $k \in \cup_{1 \leq r \leq n} (E_{r,g}^{(1)})^{-1}(\Delta_n)$. Ceci, combiné à la décomposition (22), permet de montrer qu'en régime magnétique intense, l'état ψ considéré au Théorème 1 est essentiellement supporté dans la bande ω_b de largeur [21] $b^{-1/2}$ située le long du bord :

Théorème 3. *([57, Théorème 2.4]) Etant donnés $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe trois constantes $b_n > 0$, $\nu_n > 0$ et $\mu_n > 0$, qui ne dépendent que de α et n, telles que n'importe quel état ψ vérifiant les conditions du Théorème 1, satisfait l'estimation*

$$\|\psi\|_{\mathrm{L}^2([-b^{-\alpha}, b^{-1/2+\alpha}] \times \mathbb{R})} \leq \nu_n \mathrm{e}^{-\mu_n b^\alpha}, \tag{28}$$

dès lors que $b \geq b_n$ et $g \geq (2n + c)b + b^{4\alpha}$.

21. Ce qui correpond au rayon de la trajectoire cyclotronique classique.

Ce résultat, qui justifie *a posteriori* la [22]terminologie employée jusqu'ici, est une conséquence de la décomposition de $\psi = \mathbb{P}_{0,g}^{(1)}(\Delta_n)\psi$ selon (23) et de la localisation spatiale des fonctions propres $\psi_{r,g}^{(1)}(.;k)$, $r = 1, \dots, n$, de $h_{0,g}^{(1)}(k)$, pour chacun des $k \in (E_{r,g}^{(1)})^{-1}(\Delta_n)$, dans la bande ω_b. Il peut être généralisé au cas perturbé, sous réserve que les conditions garantissant l'existence d'un courant de bord pour $H_{1,g}^{(1)}$ soient satisfaites, ce qui implique d'une part que $\|V_1\|_\infty$ soit petit devant b, de façon que (26) soit vraie, et d'autre part que la longueur de Δ_n soit choisie suffisamment petite devant $|\Delta_n|$.

Théorème 4. *([57, Théorème 2.5]) Sous les conditions du Théorème 2, il existe deux constantes $\mu_n > 0$ et $\nu_n > 0$, indépendantes de $b > 0$, telles que* (28) *reste vraie pour n'importe quel état $\psi \in \mathbb{P}_{1,g}^{(1)}(\tilde{\Delta}_n)\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$, à condition que g soit choisi suffisamment grand.*

Les trois principaux ingrédients de la [23]preuve de ce résultat sont :

- *primo*, la formule de la résolvante pour $H_1 = H_L(b) + V_1 = H_{1,g}^{(1)} - gV_0^{(1)}$ et $H_{1,g}^{(1)}$,

$$R_{1,g}^{(1)}(z) = R_1(z) - gR_1(z)V_0^{(1)}R_{1,g}^{(1)},\ z \in \rho(H_{1,g}^{(1)}) \cap \rho(H_1), \tag{29}$$

  où $R_{1,g}^{(1)}(z) = (H_{1,g}^{(1)} - z)^{-1}$ et $R_1(z) = (H_1 - z)^{-1}$;
- *secundo*, la formule d'Helffer-Sjöstrand (30), qui s'avère particulièrement bien adaptée à l'étude perturbative de H_1 par $gV_0^{(1)}$, dans des régions où $\sigma(H_1)$ peut être dense ;
- *tertio*, l'estimation (32) donnée ci-après, qui est une conséquence de la méthode de Combes-Thomas appliquée à $H_L(b)$ à l'identique de ce qui est fait dans [25], et dans laquelle $J = J_L : \mathbb{R} \mapsto [0,1]$, $L > 0$, désigne une fonction de troncature spatiale vérifiant $J(x) = 0$ si $x < L$ et $J(x) = 1$ si $x > L + 1$.

Plus précisément on se donne une fonction $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ assez régulière et telle que $f_{|\tilde{\Delta}_n} = 1$ et supp $f \subset \Delta_n$, de sorte que $\psi = f(H_{1,g}^{(1)})\psi$. Ensuite, $\tilde{f}$ désignant une [24]extension quasi-analytique de f dans un voisinage de Δ_n, qui s'annule lorsque $y = \mathrm{Im}\,(z) \to 0$, la formule d'Helffer-Sjöstrand s'écrit :

$$f(H_{1,g}^{(1)}) = -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \partial_{\overline{z}}\tilde{f}(z)R_{1,g}^{(1)}(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ z = x + \imath y. \tag{30}$$

Comme le support de f est inclus dans un "gap" spectral de H_1, il résulte facilement de l'identité précédente appliquée à H_1, que $f(H_1) = 0$. Par conséquent

$$J\psi = Jf(H_{1,g}^{(1)})\psi = -\frac{g}{\pi}\int_{\mathbb{C}} \partial_{\overline{z}}\tilde{f}(z)JR_1(z)V_0^{(1)}R_{1,g}^{(1)}(z)\psi\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{31}$$

22. ψ est appelé un état de bord car il est localisé au voisinage du bord matérialisé par le potentiel V_0, ce qui explique que le courant porté par ψ soit dénommé courant de bord. Néanmoins, et même s'il ne sera plus fait mention de ce phénomène ne dans la suite de ce manuscrit, il convient de noter à ce stade avec [36] que certains courants dits "de bord" existent dans des systèmes similaires en l'absence de tout bord.

23. Elle est reproduite ici dans ses grandes lignes afin d'expliquer l'obstruction (décrite dans le paragraphe qui suit) à la généralisation du Théorème 4 pour les états quantiques dépendant du temps.

24. Pour $f \in \mathrm{C}^{m+1}(\mathbb{R})$, $m \in \mathbb{N}^*$, on prend $\tilde{f}(z) = \left(\sum_{r=0}^m f^{(r)}(x)\frac{(\imath y)^r}{r!}\right)\sigma(x,y),\ z = x + \imath y$, où $\sigma(x,y) = \tau(y/\langle x\rangle)$, $\langle x\rangle = (1+x^2)^{1/2}$, et $\tau \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ est une fonction à valeurs réelles et satisfaisant

$$\tau(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 2. \end{cases}$$

Ainsi, $\partial_{\overline{z}}\tilde{f}(z) = \frac{1}{2}\left(\sum_{r=1}^m f^{(r)}(x)\frac{(\imath y)^r}{r!}\right)(\partial_x\sigma + \imath\partial_y\sigma) + \frac{1}{2}f^{(m+1)}(x)\frac{(\imath y)^m}{m!}\sigma(x,y)$, avec $\partial_x\sigma$ et $\partial_y\sigma$ qui s'annulent si $|y| < \langle x\rangle$ ou $|y| > 2\langle x\rangle$.

d'après (29)-(30). Ensuite, la distance entre les supports respectifs de J et $V_0^{(1)}$ étant $L > 0$, il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ satisfaisant

$$\|JR_1(z)V_0^{(1)}\| \leq \frac{C_1}{\mathrm{dist}(\sigma(H_1), z)} \mathrm{e}^{-C_2 b^{1/2} L}, \ z \in \rho(H_1), \tag{32}$$

avec C_2 ne dépendant pas de b. Or la distance $\mathrm{dist}(\sigma(H_1), z)$ est donnée par le minimum de la distance de Δ_n au bord du spectre de H_1. Elle est donc minorée par $\min((a-1)b - \|V_1\|_\infty, (3-c)b - \|V_1\|_\infty)$. Le résultat découle donc directement de ceci et (30)-(32) pour $L = b^{\alpha - 1/2}$, $\alpha \in (0, 1/2)$.

Introduction de la dynamique. Sous les hypothèses du Théorème 1 l'inégalité (24) reste inchangée si l'on remplace l'état $\psi = \mathbb{P}_{0,g}^{(1)}(\Delta_n)\psi$ par son évolution temporelle $\psi_t = \mathrm{e}^{-\imath t H_{0,g}^{(1)}}\psi$, ou, ce qui revient au même, si l'on remplace V_y par l'opérateur d'Heisenberg $V_y(t) = \mathrm{e}^{-\imath t H_{0,g}^{(1)}} V_y \mathrm{e}^{\imath t H_{0,g}^{(1)}}$. Cela signifie que le courant persiste avec la même intensité minimale au cours du temps. De même, l'estimation du Théorème 3 étant uniforme en $\psi \in \mathbb{P}_{0,g}^{(1)}(\Delta_n)\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$, elle demeure valable pour ψ_t. Ceci garantit que ψ_t reste localisé dans une bande de largeur $0(b^{-1/2})$, et donc que le courant qu'il porte est bien un courant de bord à tous les instants t.
Considérons maintenant le cas perturbé, et plaçons-nous sous les hypothèses du Théorème 2. Ici encore, l'estimation (27) est uniforme par rapport à $\psi = \mathbb{P}_{0,g}^{(1)}(\tilde{\Delta_n})\psi$. Elle reste donc valable pour tout état $\psi_t = \mathrm{e}^{-\imath t H_{1,g}^{(1)}}\psi$, ce qui assure que le courant porté par ψ_t persiste au cours du temps en dépit de la présence du désorde quantique modélisé par le potentiel V_1. Par contre il n'est pas garanti que cet état reste effectivemment localisé au voisinage du bord pour tout t. Cela est imputable à la technique utilisée dans la démonstration du Théorème 4, et plus exactement au fait que l'intégrant de (31) dépende de f'. En particulier, si f est changée en $f_t(x) = \mathrm{e}^{-\imath t x} f(x)$, de telle sorte que $\psi_t = f_t(H_{1,g}^{(1)})\psi$ soit solution de l'équation de Schrödinger avec donnée initiale ψ, alors la borne supérieure sur $\|J\psi_t\|$, induite par (31)-(32), est une fonction strictement croissante de t. Par suite, si l'état ψ_t, qui est initialement localisé dans une bande de largeur $0(b^{-1/2})$ le long du bord, continue bien à porter un courant avec la même intensité minimale au cours du temps, il ne peut être exclu qu'il soit délocalisé en un temps fini sous l'effet de la perturbation V_1.

Généralisations. Le modèle non perturbé traité jusqu'ici, décrit par l'Hamiltonien $H_{0,g}^{(1)}$, correspond à un bord droit matérialisé par un confinement "hard edge", $gV_0^{(1)}$. En fait le cas de potentiels confinants plus généraux, de type "soft edge", a été traité dans [57, Section 6]. Il s'agit de potentiels électrostatiques définis par des fonctions qui sont :

(a) soit globalement convexes, comme dans le cas de fonctions monômiales de la forme

$$V_0(x) = g|x|^p \chi_{\mathbb{R}_-}(x), \ g > 0, p \geq 1,$$

(b) soit de type convexe-concave, c'est-à-dire qui sont initialement convexes et deviennent asymptotiquement plates, comme c'est le cas par exemple pour

$$V_0(x) = g \tanh(|x|) \chi_{\mathbb{R}_-}(x), \ g > 0.$$

Les résultats d'estimation, de localisation et de stabilité sous perturbation bornée, du courant de bord, établis précédemment dans le cas "hard edge", s'étendent sans modification essentielle (voir [57, Théorèmes 6.1 et 6.2] au cas de ces deux classes de potentiels "soft edge". Cette remarque vaut également pour la bande infinie, étudiée dans la section 2.2.2 (voir [58, Lemme 3.1]).
En fait, le bénéfice principal de l'étude du modèle "hard edge" est double. *Primo*, elle

donne lieu a des estimations simples et optimales, qui, *secundo*, s'étendent au cas du modèle à un bord droit avec condition de Dirichlet homogène. La méthode utilisée procède par comparaison de l'Hamiltonien de Landau $H_L(b)$ défini sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ avec conditions de Dirichlet en $x=0$, avec $H_{0,g}^{(1)}$ dans le régime $g \to +\infty$. Le résultat principal ainsi que les grandes lignes du raisonnement utilisé sont décrits dans la section 2.2.3.
Enfin, bien que tous les potentiels considérés jusqu'ici modélisent des bords droits, les systèmes de Hall à un bord non-droit peuvent être analysés de façon assez similaire à l'aide de la notion de *vélocité asymptotique*, comme cela a été fait dans [57, Section 4]. Les résultats correspondants sont explicités dans la section 2.2.4.

2.2.2 Cas de la bande infinie

Courant total, courants droit et gauche. Etant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et le sous-intervalle $\Delta_n \subset (\mathcal{E}_{n,g}^{(2)}, \mathcal{E}_{n+1,g}^{(2)})$ satisfaisant les conditions (20)-(21), il résulte de (23) et de la parité des fonctions $k \mapsto E_{r,g}^{(2)}(k)$, $r=1,\ldots,n$, que

$$\langle V_y \psi, \psi \rangle = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \int_{(E_{r,g}^{(2)})^{-1}(\Delta_n) \cap \mathbb{R}_+} (|\beta_r(k)|^2 - |\beta_r(-k)|^2) \partial_k E_{r,g}^{(1)}(k) \mathrm{d}k, \tag{33}$$

pour n'importe quel état $\psi \in \mathbb{P}_{0,g}^{(2)}(\Delta_n)\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Evidemment, si ψ est choisi de telle façon que

$$|\beta_r(-k)| = |\beta_r(k)|,\ k \in (E_{r,g}^{(2)})^{-1}(\Delta_n) \cap \mathbb{R}_+,\ r=1,\ldots,n,$$

alors le courant total $J_y(\psi)$ qu'il porte est nul. Plus généralement, tout état ψ vérifiant $\psi = \mathbb{P}_{0,g}^{(2)}(\Delta_n)\psi$ se décompose, eu égard à (22), en la somme de deux fonctions de supports respectifs $\cup_{1 \leq r \leq n}(E_{r,g}^{(2)})^{-1}(\Delta_n) \cap \mathbb{R}_\pm$ dans l'espace de la variable de Fourier k. Ces deux composantes correpondent à des courants se propageant dans deux directions opposées le long des bords droit et gauche, respectivement. Pour construire un état se propageant le long du bord droit (resp. gauche), il suffit de choisir les coefficients β_r, $r=1,\ldots,n$, de ψ de telle façon que

$$\operatorname{supp} \beta_r \subset \cup_{1 \leq s \leq n}(E_{s,g}^{(2)})^{-1}(\Delta_n) \cap \mathbb{R}_+ \text{ (resp. } \operatorname{supp} \beta_r \subset \cup_{1 \leq s \leq n}(E_{s,g}^{(2)})^{-1}(\Delta_n) \cap \mathbb{R}_-). \tag{34}$$

En effet, un tel état est, d'après [58, Proposition 2.1], localisé au voisinage du bord $x=\ell$ (resp. $x=-\ell$) et plus précisément dans une bande de la forme $\omega_{b,\ell} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq \ell - x \leq O(b^{-1/2})\}$ (resp. $\omega_{b,-\ell} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leq x + \ell \leq O(b^{-1/2})\}$) pour peu que g et $b\ell^2$ soient choisis suffisamment grands. De plus, compte tenu de (4) et du fait que $\partial_k(bx-k)^2 = -b^{-1}\partial_x(bx-k)^2$, il vient facilement en intégrant par parties dans l'identité de Feynman-Hellman $\partial_k E_{r,g}^{(1)}(k) = \int_{\mathbb{R}} \partial_k (bx-k)^2 \psi_{r,g}^{(2)}(x;k)^2 \mathrm{d}x$, que

$$\partial_k E_{r,g}^{(1)}(k) = \frac{g}{b}(\psi_{r,g}^{(2)}(\ell;k)^2 - \psi_{r,g}^{(2)}(-\ell;k)^2),\ r \in \mathbb{N}^*. \tag{35}$$

Or la région $x \approx -\ell$ (resp. $x \approx \ell$) étant incluse dans la zone classiquement interdite pour les énergies $E_{r,g}^{(2)}(k)$ lorsque $k \in (E_{r,g}^{(2)}(k))^{-1}(\Delta_n) \cap \mathbb{R}_+$ (resp. $k \in (E_{r,g}^{(2)}(k))^{-1}(\Delta_n) \cap \mathbb{R}_-$), $r=1,\ldots,n$, la quantité $|\psi_{r,g}^{(2)}(-\ell;k)|$ (resp. $|\psi_{r,g}^{(2)}(\ell;k)|$) est donc exponentiellement petite devant $|\psi_{r,g}^{(2)}(\ell;k)|$ (resp. $|\psi_{r,g}^{(2)}(-\ell;k)|$). Compte tenu de (33)-(35), il résulte donc de ceci que $\langle \psi, V_y \psi \rangle$ sera de signe positif ou bien négatif selon que l'état ψ est spectralement concentré dans $\cup_{1 \leq r \leq n}(E_{r,g}^{(2)}(k))^{-1}(\Delta_n) \cap \mathbb{R}_+$ ou dans $\cup_{1 \leq r \leq n}(E_{r,g}^{(2)}(k))^{-1}(\Delta_n) \cap \mathbb{R}_-$.
En fait, pour qu'un état $\psi = \mathbb{P}_{0,g}^{(2)}(\Delta_n)\psi$ porte un courant droit ou gauche, il n'est pas indispensable de requérir l'une des deux conditions exprimées par (34). Il suffit simplement que les coefficients β_r, $r=1,\ldots,n$, de ψ, obéissent à une condition de dissymétrie de la forme

$$|\beta_r(k)|^2 \geq (1+\gamma^2)|\beta_r(-k)|^2,\ k \in (E_{r,g}^{(2)})^{-1}(\Delta_n) \cap \mathbb{R}_+ \text{ (resp. } k \in (E_{r,g}^{(2)})^{-1}(\Delta_n) \cap \mathbb{R}_-), \tag{36}$$

pour une constante $\gamma > 0$. Lorsque γ tend vers l'infini, on retrouve la configuration (34) dans laquelle ψ est localisé dans $\omega_{b,\ell}$ (resp. dans $\omega_{b,-\ell}$). De façon analogue, on s'attend ici à ce que les états ψ satisfaisant (36) pour $\gamma > 0$ fixé, soient essentiellement localisés dans la partie droite (resp. gauche) de la bande I_ℓ.

Théorème 5. *([58, Théorème 2.1]) Soit Δ_n, $n \in \mathbb{N}^*$, donné par* (6) *et satisfaisant les conditions* (20)-(21)*. Alors, les constantes β_n et c_n étant définies par* (8)*, tout état $\psi \in \mathbb{P}^2_{0,g}(\Delta_n)\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ vérifiant la condition* (36)*, satisfait l'estimation*

$$J_y(\psi) = |\langle \psi, V_y \psi \rangle| \geq \frac{\gamma^2}{2+\gamma^2} c_n (a-1)^2 (3-c)^3 b^{1/2} \|\psi\|^2, \qquad (37)$$

si $b\ell^2 \geq \beta_n$ et $g \geq \mathfrak{e}_{n+1}(b)$.

Courant perturbé. La persistance du courant de bord droit ou gauche en présence d'impuretés modélisées par un potentiel borné V_1, d'amplitude $\|V_1\|_\infty$ convenablement choisie par rapport à b, est établie (dans le cas stationnaire) par le [58, Théorème 2.2]. Elle se déduit de (37) de façon similaire à ce qui a été décrit dans le cas du demi-plan. Plus précisément, $\mathbb{P}^{(2)}_{1,g}$ désignant la famille spectrale de l'opérateur $H^{(2)}_{1,g} = H^{(2)}_{0,g} + V_1$, et $\tilde{\Delta}_n \subset \Delta_n$ ayant même milieu que Δ_n, l'inégalité (27) reste valable lorsque $|\tilde{\Delta}_n|$ et $\|V_1\|_\infty$ soient assez petits, pour tout état $\psi \in \mathbb{P}^{(2)}_{1,g}(\tilde{\Delta}_n)\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$ tel que $\mathbb{P}^{(2)}_{0,g}(\Delta_n)\psi$ obéit à la condition de dissymétrie (36).

Evolution temporelle des courants de bord. L'inégalité (37) reste inchangée si l'on remplace l'état $\psi = \mathbb{P}^{(2)}_{0,g}(\Delta_n)\psi$ par son évolution temporelle $\psi_t = \mathrm{e}^{-\imath t H^{(2)}_{0,g}}\psi$. En effet, l'état initial ψ satisfaisant (36), il en va de même pour $\psi_t = \mathbb{P}^{(2)}_{0,g}(\Delta_n)\psi_t$ à chaque instant $t \in \mathbb{R}$, puisque

$$\langle \hat{\psi}_t(.;k), \psi^{(2)}_{r,g}(.;k)\rangle = \langle \mathrm{e}^{-\imath t h^{(2)}_{0,g}(k)} \hat{\psi}(.;k), \psi^{(2)}_{r,g}(.;k)\rangle = \mathrm{e}^{-\imath t E^{(2)}_{r,g}} \beta_r(k),\ r = 1, \ldots, n. \qquad (38)$$

Par contre la situation est différente si l'on ajoute une perturbation V_1. En effet, (38) n'étant en général plus vraie si l'on remplace ψ_t par $\mathrm{e}^{-\imath t H^{(2)}_{1,g}}\psi$ avec $\psi \in \mathbb{P}^{(2)}_{1,g}(\tilde{\Delta}_n)\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$, l'estimation (27) du courant n'est donc *a priori* plus invariante sous l'évolution temporelle générée par $H^{(2)}_{1,g}$. On peut s'attendre ici à ce que la perturbation "mixe" les courants de bord droit et gauche en temps fini. En fait, il est prouvé dans [26, Section 6], avec une technique similaire à celle employée dans la démonstration du Théorème 4, que le courant de bord porté par ψ_t garde une intensité minimale $O(b^{1/2})$ pour une durée au moins égale à $O(\mathrm{e}^{C_0 b\ell^2})$, C_0 désignant une constante indépendante de b et ℓ.

2.2.3 Systèmes de Hall avec conditions de Dirichlet homogènes

Seul le cas du demi-plan est exposé ici, celui de la bande infinie étant traité de façon quasiment identique dans [58, Section 3.3].
Les bornes inférieures obtenues sur les courants de bord au Théorème 1, dans le cas non perturbé, et, dans l'estimation (27), en présence de faible désordre, sont indépendantes de la taille de la barrière de potentiel g, la seule condition requise étant que $g > \mathfrak{e}_{n+1}(b)$. Ceci suggère que ces bornes inférieures restent valides dans la limite $g \to +\infty$. Cette limite correspond formellement à une condition de Dirichlet sur le bord $x = 0$, comme

on peut le voir à partir de l'estimation [25]suivante

$$0 \le \psi_{r,g}^{(1)}(0;k) \le \left(\frac{2b}{g}\right)^{1/2} ((2n-1)b+g)^{1/4},\ r \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{R}, \tag{39}$$

qui se déduit facilement de la formule de Feynman-Hellmann,

$$\partial_k E_{r,g}^{(1)}(k) = -2 \int_{\mathbb{R}} \hat{V}_y(k) \psi_{r,g}^{(1)}(x;k)^2 \mathrm{d}x = -\frac{g}{b} \psi_{r,g}^{(1)}(0;k)^2,\ \hat{V}_y(k) = bx - k,$$

et de l'équation aux valeurs propres (4).
Soit donc $H_{0,D}^{(1)}$ l'Hamiltonien de Landau $H_L(b)$ défini sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ avec conditions de Dirichlet en $x = 0$. Il admet évidemment une décomposition en intégrale directe par rapport à la variable y. On note $h_{0,D}^{(1)}(k)$ ses opérateurs de fibre et $\{E_{n,D}^{(1)}(k),\ n \in \mathbb{N}^*\}$, $\{\psi_{n,D}^{(1)}(.;k),\ n \in \mathbb{N}^*\}$ les valeurs et vecteurs propres associés. Du fait des conditions de Dirichlet, les courbes de dispersion satisfont $\lim_{k \to -\infty} E_{r,D}^{(1)}(k) = +\infty$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$. L'opérateur perturbé s'écrit $H_{1,D}^{(1)} = H_{0,D}^{(1)} + V_1$, et est défini sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$. Notant $\mathbb{P}_{0,D}^{(1)}$ et $\mathbb{P}_{1,D}^{(1)}$ les familles spectrales respectives de $H_{0,D}^{(1)}$ et $H_{1,D}^{(1)}$, le résultat principal pour le demi-plan, obtenu en comparant $H_{0,D}^{(1)}$ à $H_{0,g}^{(1)}$ dans le régime "g grand", s'énonce comme suit :

Théorème 6. *([57, Théorème 3.1]) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et Δ_n défini par* (5) *et choisi assez*[26]*petit de sorte que*

$$(E_{r,D}^{(1)})^{-1}(\Delta_n) \cap (E_{s,D}^{(1)})^{-1}(\Delta_n) = \emptyset,\ 1 \le r \ne s \le n.$$

Alors, tout état $\psi \in \mathbb{P}_{1,D}^{(1)}(\tilde{\Delta}_n)\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$, où $\tilde{\Delta}_n \subset \Delta_n$ a même milieu que Δ_n, porte un courant satisfaisant la borne inférieure (27)*, à condition que $|\tilde{\Delta}_n|$ et $\|V_1\|_\infty / b$ soient suffisamment petits.*

L'ingrédient essentiel de la démonstration du Théorème 6 est la convergence du projecteur spectral $P_{r,g}^{(1)}(k)$, $r = 1, \ldots, n$, associé à la valeur propre $E_{r,g}^{(1)}(k)$ de $h_{0,g}^{(1)}(k)$, vers celui de $h_{0,D}^{(1)}(k)$ pour $E_{r,D}^{(1)}(k)$, lorsque g tend vers l'infini. Ce dernier projecteur étant noté $P_{r,D}^{(1)}(k)$, il existe en effet tout $b > 0$ et $g \gg \mathfrak{e}_{n+1}(b)$, une constante $C_1(n,b) > 0$ garantissant

$$\| P_{r,D}^{(1)}(k) - P_{r,g}^{(1)}(k) \| \le \frac{C_1(n,b)}{g^{1/4}},\ 1 \le r \le n,\ k \in (E_{r,g}^{(1)})^{-1}(\Delta_n) \cup (E_{r,D}^{(1)})^{-1}(\Delta_n), \tag{40}$$

la norme étant celle de $\mathcal{B}(\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}))$. Cette convergence s'obtient en [27]comparant les résolvantes $R_{0,g}^{(1)}(z;k) = (h_{0,g}^{(1)}(k) - z)^{-1}$ et $R_{0,D}^{(1)}(z;k) = (h_{0,D}^{(1)}(k) - z)^{-1}$ lorsque $g \to +\infty$, pour z appartenant à un contour de rayon $g^{-3/8}$ centré autour de $E_{r,D}^{(1)}(k)$, pour $r = 1, \ldots, n$ et $k \in (E_{r,g}^{(1)})^{-1}(\Delta_n)$. Le calcul est basé sur la [28]convergence des courbes

25. Ici, on a supposé que $\psi_{r,g}^{(1)}(x;k) \ge 0$ pour tout $x < 0$, ce qui est toujours possible, comme indiqué dans [57, Proposition B.1].

26. Un tel intervalle existe toujours en vertu de [29, Lemme 2.1(a)].

27. A l'aide de l'égalité de type Krein $R_{0,g}^{(1)}(z;k) - R_{0,D}^{(1)}(z;k) = R_{0,g}^{(1)}(z;k) T_0^* B_0 R_{0,D}^{(1)}(z;k)$, où T_0 est l'opérateur de trace $(T_0 u)(x) = u(0)$ et $(B_0 u)(x) = u'(0)$, déduite du théorème de Green, et diverses estimations sur les traces.

28. Sous les conditions spécifiées ci-dessus, il existe en effet une constante $C_0(n,b) > 0$ telle que :

$$0 \le E_{r,D}^{(1)}(k) - E_{r,g}^{(1)}(k) \le \frac{C_0(n,b)}{g^{1/2}},\ 1 \le r \le n,\ k \in (E_{r,g}^{(1)})^{-1}(\Delta_n) \cup (E_{r,D}^{(1)})^{-1}(\Delta_n).$$

de dispersion $E_{r,g}^{(1)}$ vers $E_{r,D}^{(1)}$ lorsque $g \to +\infty$, qui est une conséquence de (39) et de la décroissance exponentielle des fontions propres $\psi_{r,g}^{(1)}(.;k)$ dans la zone classiquement interdite.
La stratégie générale de la démonstration consiste à estimer préalablement $\langle \psi, V_y \psi \rangle$ dans le cas non perturbé, c'est-à-dire pour $\psi = \mathbb{P}_{0,D}^{(1)}(\Delta_n)\psi$. Cet état se décomposant de façon analogue à (22) sur la famille des fonctions propres $\psi_{r,D}^{(1)}(.;k)$, on note $\beta_r^D(k)$ le coefficient associé. A partir de la convergence locale de $E_{r,g}^{(1)}$ vers $E_{r,D}^{(1)}$, et du fait que $\langle \psi_{r,g}^{(1)}, \psi_{r,D}^{(1)} \rangle \geq C > 0$ lorsque g tend vers l'infini, le symbole $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignant ici et dans toute cette section 2.2.3 le produit scalaire de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$, on obtient l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
-\langle \psi, V_y \psi \rangle &= -\sum_{r=1}^{n} \int_{(E_{r,D}^{(1)})^{-1}(\Delta_n)} |\beta_r^D(k)|^2 \langle \psi_{r,D}^{(1)}(.;k), P_{r,D}^{(1)}(k) \hat{V}_y(k) P_{r,D}^{(1)}(k) \psi_{r,D}^{(1)}(.;k) \rangle \mathrm{d}k \\
&\geq -\sum_{r=1}^{n} \int_{(E_{r,D}^{(1)})^{-1}(\Delta_n)} |\beta_r^D(k)|^2 |\langle \psi_{r,D}^{(1)}(.;k), \psi_{r,D}^{(1)}(.;k) \rangle|^2 \\
&\qquad \times \langle \psi_{r,g}^{(1)}(.;k), P_{r,g}^{(1)}(k) \hat{V}_y(k) P_{r,g}^{(1)}(k) \psi_{r,g}^{(1)}(.;k) \rangle \mathrm{d}k - \mathcal{R}(\psi) \\
&\geq -C^2 \sum_{r=1}^{n} \int_{(E_{r,g}^{(1)})^{-1}(\Delta_n)} |\beta_r^D(k)|^2 \langle \psi_{r,g}^{(1)}(.;k), \hat{V}_y(k) \psi_{r,g}^{(1)}(.;k) \rangle \mathrm{d}k - \mathcal{R}(\psi).
\end{aligned}$$

Le terme principal du membre de droite de cette inégalité est minoré comme dans le Théorème 1. Le reste $\mathcal{R}(\psi)$ est majoré par deux fois la quantité

$$\sum_{r=1}^{n} \int_{(E_{r,D}^{(1)})^{-1}(\Delta_n)} |\beta_r^D(k)|^2 |\langle \psi_{r,D}^{(1)}(.;k), (P_{r,D}^{(1)}(k) - P_{r,g}^{(1)}(k)) \hat{V}_y(k) P_{r,D}^{(1)}(k) \psi_{r,D}^{(1)}(.;k) \rangle| \mathrm{d}k,$$

qui est bornée de façon appropriée par l'estimation (40). Ceci fournit l'estimation du courant de bord pour $V_1 = 0$. La fin de la démonstration est ensuite analogue à celle utilisée pour établir (27).

2.2.4 Cas d'un système à un bord non droit

Les résultats de cette section 2.2.1 sont essentiellement basés sur l'estimation (24) obtenue dans le cas non perturbé, grâce à l'utilisation de la transformée de Fourier partielle $\mathcal{F}_y$. Ceci est rendu possible par l'invariance du système dans la direction y. Le cas plus général de régions non bornées et simplement connectées $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, possédant un bord de classe C^3 par morceaux est traité dans [41], sous réserve que la frontière ne devienne pas asymptotiquement parallèle à elle-même. Ceci afin que la région Ω ne s'identifie *in fine* à une géométrie à deux bords à l'infini, auquel cas l' interaction des trajectoires classiques de directions opposées est susceptible d'annihiler le courant. Notant $H_L^D(b)$ l'Hamiltonien de Landau défini dans Ω avec conditions de Dirichlet sur $\partial\Omega$, le résultat principal de [41] énonce, pour toute perturbation $V_1 \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ et tout $E \notin \{\mathfrak{e}_n(b),\ n \in \mathbb{N}^*\}$, sous l'hypothèse géométrique portant sur la frontière $\partial\Omega$ mentionnée ci-dessus, que le spectre de l'Hamiltonien $H_\Omega^D = H_L^D(b) + V_1$ est absolument continu dans un voisinage de E, à condition bien sûr que $\|V_1\|_\infty / b$ soit choisi suffisamment petit. Il est obtenu en construisant un opérateur conjugué associé à H_Ω^D, induisant une estimation de Mourre dans un voisinage spectral de E.

Dans [57, Section 4] nous utilisons une notion différente, celle de vélocité asymptotique, afin d'analyser le cas de régions à un bord non-droit et d'y prouver notamment la persistance du courant de bord.

Vélocité asymptotique. La vélocité asymptotique est définie pour n'importe quelle paire d'opérateurs de Schrödinger autoadjoints (H_0, H) pour lesquels les opérateurs d'onde

$\Omega_\pm$ existent. Ils sont définis par

$$\Omega_\pm = s - \lim_{t \to \pm\infty} \mathrm{e}^{\imath t H} \mathrm{e}^{-\imath t H_0} \mathbb{P}_{\mathrm{ac}}(H_0),$$

$\mathbb{P}_{\mathrm{ac}}(H_0)$ désignant ici la projection sur le sous-espace spectral absolument continu associé à H_0. Lorsque les opérateurs d'onde existent, leur image est contenue dans le sous-espace spectral d'absolue continuité de H, et ce sont des isométries partielles entre ces différents sous-espaces. Nous utilisons dans ce qui suit les opérateurs d'onde $\Omega_\pm(\Delta)$ obtenus en remplaçant $\mathbb{P}_{\mathrm{ac}}(H_0)$ par le projecteur spectral $\mathbb{P}_0(\Delta)$ de H_0, associé à un intervalle Δ contenu dans le spectre absolument continu de H_0. Nous nous intéressons ici à la vélocité asymptotique dans la direction y, pour des états dont l'énergie est concentrée dans Δ. Elle est définie par :

$$V_y^\pm(\Delta) = \Omega_\pm(\Delta) V_y \Omega_\pm^*(\Delta).$$

Perturbation géométrique de la frontière. On considère ici une déformation géométrique du demi-plan étudié dans la section 2.2.1, en modifiant le potentiel confinant $V_0^{(1)}$ défini par (3) comme la fonction caractéristique χ_{Ω_0} de $\Omega_0 = (-\infty, 0] \times \mathbb{R}$. On se donne pour cela un sous-ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ satisfaisant la condition suivante :

$$\exists R > 0,\ \Omega \setminus \Omega_0 \subset \mathbb{R} \times [-R, R]. \tag{41}$$

Le potentiel $V_\Omega = \chi_\Omega = V_0^{(1)} + \chi_{\Omega\setminus\Omega_0}$ modélise la déformation géométrique du domaine Ω_0 en Ω.
Soit maintenant $H_{\Omega,g} = H_L(b) + gV_\Omega$. L'intervalle Δ_n, $n \in \mathbb{N}^*$, étant défini par (6), les opérateurs d'onde $\Omega^\pm(\Delta_n)$ associés à la paire $(H_{0,g}^{(1)}, H_{\Omega,g})$ existent pour tout $b > 0$ et $g \geq \mathfrak{e}_{n+1}(b)$, pour peu que $c - a$ soit assez petit. Ce résultat, qui est celui de [57, Proposition 4.1], est obtenu à partir de (7) par la méthode de la phase stationnaire. Il entraîne en particulier, sous les conditions prescrites, que le spectre de $H_{\Omega,g}$ est absolument continu dans l'intervalle Δ_n. Sous ces mêmes hypothèses et pour tout $\psi \in \mathbb{P}_{\Omega,g}(\Delta_n)\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$, $\mathbb{P}_{\Omega,g}(\Delta_n)$ désignant la famille spectrale de $H_{\Omega,g}$ associée à l'intervalle Δ_n, la vélocité asymptotique $V_y^\pm(\Delta_n)$ du courant porté par ψ dans la région perturbée est inférieurement bornée par $O(b^{1/2})$. On a plus précisément :

$$\langle \psi, V_y^\pm(\Delta_n)\psi \rangle \geq c_n (a-1)^2 (3-c)^3 b^{1/2} \|\psi\|^2, \tag{42}$$

en vertu [57, Proposition 4.2], la constante c_n étant celle du Théorème 1 et le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, celui de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^2)$. Ceci prouve l'existence de courant se propageant le long du bord au voisinage de $y = \pm\infty$. Les techniques usuelles de calcul perturbatif, semblables à celles utilisées pour établir (27), garantissent ensuite la stabilité sous perturbation bornée V_1, à condition que $\|V_1\|_\infty$ soit bien évidemment suffisamment petit devant b, de la borne inférieure (42) de la vélocité asymptotique.

Théorème 7. *([57, Théorème 4.2]) Supposons que la région $\Omega \setminus \Omega_0$ satisfait la condition* (41)*. Soient $b > 0$ et $H_{1,g} = H_L(b) + gV_\Omega + V_1$ où $V_1 \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Soit Δ_n, $n \in \mathbb{N}^*$, défini par* (6)*. Choisissons $c - a$ et $\|V_1\|_\infty / b$ assez petits de façon que la constante κ définie par* (25) *soit > 0. Alors pour tout $\psi = \mathbb{P}_{1,g}(\Delta_n)\psi$, où $\mathbb{P}_{1,g}(\Delta_n)$ désigne la famille spectrale de $H_{1,g}$, et tout $g \geq \mathfrak{e}_{n+1}(b)$, la vélocité asymptotique $V_y^\pm(\Delta_n)$ satisfait l'inégalité*

$$\langle \psi, V_y^\pm(\Delta_n)\psi \rangle \geq \tilde{c}_n \kappa^2 \|\psi\|^2,$$

la constante $\tilde{c}_n$ étant identique à celle de (27)*.*

Il est à noter que le théorème précédent s'applique à des perturbations Ω qui ne sont pas forcément connexes, ni même bornées dans la direction x. Même si la situation que nous avons à l'esprit est celle d'une déformation Ω du demi-plan Ω_0, il est intéressant de noter à partir du Théorème 7 que le courant porté par certains états quantiques persiste en présence d'une frontière d'extension infinie dans la direction x.

2.3 Théorie de Mourre et propriétés spectrales

Pour simplifier l'exposé, on se contente ici d'examiner les modèles à un ou deux bords droits avec condition de Dirichlet, les résultats exposés s'adaptant sans modification essentielle au cas des Hamiltoniens $H_{0,g}^{(j)}$, avec $j = 1$ ou 2 suivant la géométrie considérée, pour $g > 0$.

2.3.1 Courants de bord et commutateurs positifs

Le cas du demi-plan. Lorsque la particule est confinée dans un système semi-infini comme un demi-plan, l'existence de courants de bords peut être prouvée à l'aide de la théorie des commutateurs positifs, à l'image de ce qui est fait dans [29, 41]. Dans ce cas, pour un système infini dans la direction y, l'opérateur position y est un commutateur admissible pour $H_{1,D}^{(1)}$ au sens de la théorie de Mourre. Cela tient essentiellement au fait que $[H_{1,D}^{(1)}, \imath y] = 2V_y$. En effet, en vertu du Théorème 5, il existe donc une constante $c > 0$ telle que

$$\mathbb{P}_{1,D}^{(1)}(\tilde{\Delta}_n)[H_{1,D}^{(1)}, \imath y]\mathbb{P}_{1,D}^{(1)}(\tilde{\Delta}_n) \geq c\mathbb{P}_{1,D}^{(1)}(\tilde{\Delta}_n),$$

sous réserve que $\tilde{\Delta}_n$ et $\|V_1\|_\infty$ soient assez petits devant b. Comme, de plus, $[[H_{1,D}^{(1)}, y], y] = -2\imath$, on obtient finalement par un argument [29]standard de la théorie de Mourre :

Théorème 8. *([57, Théorème 5.1]) Soient $V_1 \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ et $\tilde{\Delta}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, satisfaisant les conditions du Théorème 6. Alors le spectre de $H_{1,D}^{(1)}$ est absolument continu dans l'intervalle $\tilde{\Delta}_n$.*

Ainsi, pour les géométries à un bord, l'existence de courants de bord est équivalente à celle d'intervalles d'absolue continuité dans le spectre de l'opérateur correspondant, ce qui est conforme aux résultats obtenus dans le même contexte par [29, 77, 41, 26].

Géométries à deux bords. Néanmoins, ceci n'est plus forcément vrai pour des géométries plus complexes. Dans certaines situations examinées notamment dans [37, 44, 43, 45, 58], la présence de courants de bord n'implique pas forcément que le spectre est absolument continu. En effet, dans le cas d'une bande infinie, l'ajout d'un second bord change radicalement la situation observée pour les géométries à un bord, car le courant de Hall se déplace alors dans des sens opposés le long de chacun des deux bords. La dérivée des courbes de dispersion n'ayant plus de signe fixé, y n'est donc plus un opérateur conjugué admissible, au sens de Mourre, pour l'Hamiltonien correspondant. En fait, pour ces modèles, l'existence de courants de bord n'a, en général, aucune implication sur la nature spectrale de cet Hamiltonien. Dans le cas d'une géométrie à deux bords de type cylindrique par exemple, il existe en effet des courants de bord, et ceci bien que le spectre de l'Hamiltonien correspondant soit purement ponctuel (voir [43, 45] et [58, Section 4]). Cependant, pour une bande infinie, la présence de courants de bord se traduit nécessairement par l'existence d'intervalles d'absolue continuité dans le spectre de l'opérateur correspondant. Ce fait peut être justifié à l'aide de la théorie de Mourre, dont l'application requiert au préalable la construction d'opérateurs conjugués appropriés, tels que ceux décrits dans la section 2.3.2.

2.3.2 Inégalités de Mourre dans la bande infinie

Notations. Soit $\mathcal{S}_\ell = I_\ell \times \mathbb{R}$, $\ell > 0$, où l'on rappelle que $I_\ell = (-\ell, \ell)$. On considère l'opérateur $H_0 = H_{0,D}^{(2)} = -\partial_x^2 + (-\imath\partial_y - bx)^2$ défini sur $\{u \in \mathrm{H}^2(\mathcal{S}_\ell),\ u_{|\partial\mathcal{S}_\ell} = 0\}$. Evidemment $\mathcal{F}_y H_0 \mathcal{F}_y^* = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} h_0(k)\mathrm{d}k$, où $h_0(k) = h_{0,D}^{(2)}(k) = -\partial_x^2 + (k - bx)^2$ est défini sur

29. Voir [22, Corollaire 4.10].

$\mathrm{Dom}(h_0) = \{u \in \mathrm{H}^2(I_\ell),\ u(\ell) = u(-\ell) = 0\}$. Le spectre de $h_0(k)$, $k \in \mathbb{R}$, est discret et simple, et l'on note $\{E_r(k),\ r \in \mathbb{N}^*\} = \{E_{r,D}^{(2)}(k),\ r \in \mathbb{N}^*\}$ ses valeurs propres, qui sont des fonctions paires et analytiques réelles de la variable k. En fait, on a $E_r(k) = k^2(1+o(1))$, $r \in \mathbb{N}^*$, lorsque $k \to \pm\infty$, par le principe du min-max. De plus, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, il vient

$$kE_r'(k) > 0,\ k \in \mathbb{R}^*, \tag{43}$$

et

$$E_r(k) = \mathcal{E}_r + \mu_r k^2 + O(k^4),\ k \to 0,$$

avec

$$\mathcal{E}_r = E_r(0) > (2r+1)b,\ \mu_r = E_r''(0) > 0, \tag{44}$$

d'après [51, Théorème 2]. Les $\mathcal{E}_r = \mathcal{E}_{r,D}^{(2)} = E_r(0)$, $r \in \mathbb{N}^*$, sont alors des seuils dans le spectre de H_0 et l'on pose $\mathcal{Z} = \{\mathcal{E}_r,\ r \in \mathbb{N}^*\}$.
Ensuite, les fonctions E_r, $r \in \mathbb{N}^*$, étant continues et strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$, il est possible, grâce au [18, Lemme 3.1], d'associer une quantité $\delta_0 = \delta_0(E) \in (0, \mathrm{dist}(E, \mathcal{Z}))$ à tout $E \in (\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}^*$, de façon que l'intervalle $\Delta_E(\delta_0) = [E - \delta_0, E + \delta_0]$ vérifie simultanément :

$$E_r^{-1}(\Delta_E(\delta_0)) = \emptyset,\ r \geq 2, \tag{45}$$

si $n = 1$, et,

$$E_r^{-1}(\Delta_E(\delta_0)) \cap E_s^{-1}(\Delta_E(\delta_0)) = \emptyset,\ 1 \leq r \neq s \leq n, \tag{46}$$

lorsque $n \geq 2$. Enfin, pour tout $\gamma > 0$ on considère l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_\gamma = \mathrm{Dom}(H_0^{\gamma/2})$ équipé du produit scalaire $\langle H_0^{\gamma/2} u, H_0^{\gamma/2} v\rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{S}_\ell)}$, $u, v \in \mathrm{Dom}(H_0^{\gamma/2})$, et l'on note $\mathcal{H}_{-\gamma}$ la fermeture de $\mathrm{L}^2(\mathcal{S}_\ell)$ pour la norme $\|H_0^{-\gamma/2} u\|_{\mathrm{L}^2(\mathcal{S}_\ell)}$, $u \in \mathrm{L}^2(\mathcal{S}_\ell)$.

Opérateurs conjugués. Dans le but de définir une famille d'opérateurs conjugués admissibles pour H_0, on considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ dont chaque dérivée $f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$, est bornée par une fonction polynômiale P_k. A toute fonction $f \in \mathcal{M}$, on associe ensuite la fermeture dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{S}_\ell)$ de l'opérateur

$$A_f = A_f^* = \frac{1}{2}(y f(-\imath\partial_y) + \overline{f}(-\imath\partial_y) y),$$

défini sur $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{Dom}(h_0))$. On remarque que $\mathrm{Dom}(A_f) \cap \mathcal{H}_2$ est dense dans $\mathcal{H}_2$ car cela est vrai pour $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}, \mathrm{Dom}(h_0))$. Ce choix de A_f s'explique essentiellement par l'identité suivante,

$$[H_0, \imath A_f] = 2\mathrm{Re}\,(f(-\imath\partial_y))\, V_y,$$

qui, combinée à la formule de Feynman-Hellmann, implique facilement le :

Lemme 9. *([18, Proposition 3.1] et [16, Lemme 3.1]) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E \in (\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1})$, et $\delta_0 \in (0, \mathrm{dist}(E, \mathcal{Z}))$ satisfaisant (45)-(46). Alors pour tout $\chi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ de support $\mathrm{supp}\ \chi = \Delta_E(\delta_0)$ et $f \in \mathcal{M}$ vérifiant*

$$C_E = \min_{1 \leq r \leq n} \inf_{k \in E_r^{-1}(\Delta_E(\delta_0))} \mathrm{Re}\,(f'(k))\, E_r'(k) > 0, \tag{47}$$

l'inégalité de Mourre suivante est vraie au sens des formes sur $\mathrm{Dom}(A_f) \cap \mathcal{H}_2$:

$$\chi(H_0)[H_0, \imath A_f]\chi(H_0) \geq C_E \chi(H_0)^2. \tag{48}$$

Au-delà de l'information donnée sur le spectre de H_0 (qui est du reste déjà connu dans ce cas particulier) l'intérêt principal du commutateur positif (48) est sa stabilité sous certaines perturbations spécifiques V_1. Dans ce contexte, l'obtention d'une inégalité de Mourre pour $H_1 = H_{1,D}^{(2)} = H_0 + V_1$ passe par la sélection d'une fonction $f \in \mathcal{M}$ pour laquelle le commutateur $[V_1, A_f]$, qui est en général [30]non borné, est dominé par le terme principal $[H_0, A_f]$. De ce fait le choix d'un f convenable, parmi toutes les fonctions de $\mathcal{M}$ satisfaisant (47), est entièrement déterminé par le potentiel V_1. En particulier dans le cas d'une perturbation bornée, périodique ou décroissante par rapport à y, la méthode montre, sous diverses conditions techniques portant sur V_1, que le spectre de H_1 est absolument continu sur n'importe quel sous-intervalle de $(\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}^*$. Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus dans [37] pour [31]l'oscillateur harmonique "shifté". De plus, lorsque V_1 est relativement compact par rapport à H_0 (et satisfait certaines hypothèses supplémentaires techniques) le spectre singulier continu de l'Hamiltonien H_1 est vide.

Perturbation périodique par rapport à y. Supposons que $V_1 \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{S}_\ell)$ est T-périodique par rapport à y, pour $T > 0$ fixé :

$$V_1(x, y + T) = V_1(x, y),\ (x, y) \in \mathcal{S}_\ell. \tag{49}$$

Suivant l'idée développée dans [58, Section 1.3], on considère $U_\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \partial_y}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, le groupe des translations dans la direction y, défini par $(U_\alpha \psi)(y) = \psi(y + \alpha)$. Comme c'est une transformation unitaire, l'opérateur

$$A = -\frac{\imath}{2}(yU_T - U_{-T}y), \tag{50}$$

est autoadjoint sur le domaine $\mathrm{Dom}(y)$ de l'opérateur multiplication y, car U_α préserve $\mathrm{Dom}(y)$. En fait A correspond à l'opérateur A_f défini par (47) pour $f(k) = -\imath \mathrm{e}^{\imath T k} \in \mathcal{M}$, et vérifie

$$[H_0, \imath A] = -2\sin(-\imath T \partial_y) V_y, \tag{51}$$

ce dernier commutateur étant vu comme un opérateur borné de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{S}_\ell)$.
Ce choix d'opérateur conjugué pour H_1 s'explique par les deux raisons suivantes. *Primo*, il résulte facilement de (43) et (51) que la condition (47) est bien satisfaite, pour peu que T soit choisi assez petit :

$$\min_{k \in E_r^{-1}(\Delta_E(\delta_0))} \sin(Tk) E_r'(k) > 0,\ r = 1, \ldots, n,\ T \in \left(0, \frac{\pi}{E_1^{-1}(E + \delta_0)}\right).$$

Et *secundo*, le commutateur $[V_1, A] = 0$ puisque $[V_1, U_{\pm T}] = 0$. Tout ceci justifie, moyennant un calcul perturbatif standard, l'inégalité de Mourre suivante.

Proposition 10. *([16, Proposition 3.1]) Etant donnés n, E et δ_0 comme dans le Lemme 9, soient $V_1 \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{S}_\ell)$ satisfaisant* (49) *pour une période $T \in (0, \pi / E_1^{-1}(E + \delta_0))$ fixée, et A l'opérateur défini par* (50)*. Alors, $\delta = \delta(E) \in (0, \delta_0/2)$ et $\|V_1\|_\infty$ étant choisis suffisamment petits afin de satisfaire la condition* (53)*, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que*

$$\mathbb{P}_1(\Delta_E(\delta))[H_1, \imath A]\mathbb{P}_1(\Delta_E(\delta)) \geq C_1 \mathbb{P}_1(\Delta_E(\delta)), \tag{52}$$

$\mathbb{P}_1(\Delta_E(\delta))$ *désignant la famille spectrale de H_1 associée à l'intervalle $\Delta_E(\delta)$.*

En fait, la constante C_1 de (52) ayant pour expression

$$C_1 = C_E \left(1 - \left(\frac{2\delta + \|V_1\|_\infty}{\delta_0}\right)^2\right) - 2(\mathcal{E}_{n+1} + \|V_1\|_\infty)^{1/2} \left(\frac{2\delta + \|V_1\|_\infty}{\delta_0}\right)^{1/2},$$

30. Sauf par exemple si V_1 ne dépend pas de y.
31. En fait, l'oscillateur harmonique classique perturbé par un potentiel confinant quadratique.

la condition de petitesse sur δ et $\|V_1\|_\infty$ est ici explicite :

$$\left(\frac{2\delta + \|V_1\|_\infty}{\delta_0}\right)^2 + 2C_E^{-1}(\mathcal{E}_{n+1} + \|V_1\|_\infty)^{1/2}\left(\frac{2\delta + \|V_1\|_\infty}{\delta_0}\right)^{1/2} < 1. \tag{53}$$

Eu égard aux résultats des sections 2.2.2 et 2.2.3, si δ_0 est de l'ordre $O(b)$, il résulte alors de (53) que l'estimation de Mourre (52) survit à des perturbations V_1 d'amplitude $O(b)$. De plus, un calcul direct effectué à partir de (51) établit que $[[H_1, \imath A], \imath A] = 0$. Comme $[H_1, \imath A]$ se prolonge en un opérateur borné de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{S}_\ell)$ et que le double commutateur de H_1 avec A s'annule, (52) implique, par un [32]argument standard de la théorie de Mourre, que le spectre de H_1 est, sous les conditions de la Proposition 10, absolument continu dans $\Delta_E(\delta)$. Ce résultat s'étend ensuite à n'importe quel sous-intervalle [33]compact Δ de $(\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1})$.

Théorème 11. *([16, Théorème 3.2]) Soit Δ un sous-intervalle compact de $(\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors le spectre de H_1 dans Δ est absolument continu si T et $\|V_1\|_\infty$ sont choisis suffisamment petits.*

Potentiel décroissant dans la direction infinie. Le raisonnement précédent s'adapte sans changement essentiel au cas d'un potentiel électrostatique $V_1 \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{S}_\ell)$ décroissant suffisamment vite dans la direction y de façon que $yV_1 \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{S}_\ell)$. En effet, pour l'opérateur conjugué A défini par (50) pour une constante $T > 0$ cette fois-ci quelconque, le commutateur $[V_1, \imath A]$ est borné dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{S}_\ell)$,

$$\|[V_1, \imath A]\| \leq T\|V_1\|_\infty + 2\|yV_1\|_\infty, \tag{54}$$

ainsi qu'il découle facilement de l'identité $2[V_1, \imath A] = (\delta_T V_1)yU_T - (\delta_{-T}V_1)U_{-T}y$, où $(\delta_{\pm T}V_1)(x, y) = V_1(x, y) - V_1(x, y \pm T)$. Ainsi, pour n, E, δ_0 et T vérifiant les conditions de la Proposition 10, l'inégalité de Mourre (52) subsiste avec la constante $C_2 = C_1 - T\|V_1\|_\infty - 2\|yV_1\|_\infty > 0$, pour peu que $\delta \in (0, \delta_0)$, $\|V_1\|_\infty$ et $\|yV_1\|_\infty$ soient suffisamment [34]petits. Ensuite, un calcul direct montrant que le double commutateur $[[H_1, \imath A], \imath A] = [[V_1, \imath A], \imath A]$ est borné dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{S}_\ell)$ si $y^2 V_1 \in \mathrm{L}^\infty(\mathcal{S}_\ell)$, il vient par un procédé analogue à celui utilisé dans la démonstration du Théorème 11 :

Théorème 12. *Soit Δ un sous-intervalle compact de $(\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1})$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, le spectre de H_1 dans Δ est absolument continu si $\|y^m V_1\|_\infty$, $m = 0, 1, 2$, sont suffisamment petits.*

Potentiel relativement compact par rapport à H_0. On considère ici un potentiel électrique $V_1 : \mathcal{S}_\ell \to \mathbb{R}$ satisfaisant

$$V_1 H_0^{-1} \in \mathcal{S}_\infty, \tag{55}$$

et

$$H_0^{-1} y \partial_y V_1 H_0^{-1} \in \mathcal{S}_\infty. \tag{56}$$

L'hypothèse (55) garantit que H_1 est autoadjoint sur le domaine de H_0 et que $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_1) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H_0) = [\mathcal{E}_1, +\infty)$. L'hypothèse (56), quant à elle, induit un contrôle approprié sur la partie potentielle V_1 de l'Hamiltonien H_1 dans la mise en place de l'inégalité de Mourre suivante.

32. C'est une nouvelle fois celui de [22, Corollaire 4.10].

33. En effet, comme $\Delta \subset \cup_{E \in \Delta} \Delta_E(\delta(E))$ pour $\delta(E) \in (0, \delta_0(E)/2)$, il existe un ensemble fini $\{E_j,\ j = 1, \ldots, N\}$ de réels $E_j \in \Delta$ tels que $\Delta \subset \cup_{j=1}^N \Delta_{E_j}(\delta(E_j))$ et $\sigma(H_1) \cap \Delta_{E_j}(\delta(E_j))$ est absolument continu pour n'importe quel $j = 1, \ldots, N$.

34. La condition requise est en fait la suivante :

$$\left(\frac{2\delta + \|V_1\|_\infty}{\delta_0}\right)^2 + C_E^{-1}\left(2(\mathcal{E}_{n+1} + \|V_1\|_\infty)^{1/2}\left(\frac{2\delta + \|V_1\|_\infty}{\delta_0}\right)^{1/2} + T\|V_1\|_\infty + 2\|yV_1\|_\infty\right) < 1.$$

Proposition 13. *([18, Proposition 3.1]) Soient n, E et δ_0 comme dans le Lemme 9, et soit $A = A_f$ l'opérateur conjugué défini par* (47) *et associé à $f(k) = k$, $k \in \mathbb{R}$. Alors, sous les hypothèses* (55)-(56)*, il existe une constante $C > 0$ et un opérateur $K \in \mathcal{S}_\infty$ satisfaisant*

$$\mathbb{P}_1(\Delta_E(\delta_0))[H_1, \imath A]\mathbb{P}_1(\Delta_E(\delta_0)) \geq C\mathbb{P}_1(\Delta_E(\delta_0)) + K, \tag{57}$$

le commutateur $[H_1, \imath A]$ étant vu comme un opérateur borné de $\mathcal{H}_2$ bans $\mathcal{H}_{-2}$.

Le choix de l'opérateur conjugué A dans la Proposition 13 est justifié d'une part par l'égalité $[H_0, \imath A] = 2V_y(-\imath\partial_y)$, qui, combinée à (43), entraîne (48), et d'autre part par la fait que le terme résiduel $[V_1, \imath A] = -y\partial_y V_1$ peut être directement contrôlé par l'hypothèse (56). Les deux principales informations spectrales impliquées par (57) sont l'absence de spectre singulier continu pour H_1 ainsi que certaines propriétés génériques de ses valeurs propres.

Théorème 14. *([18, Théorème 2.1]) Supposons que* (55)-(56) *soit vraie. Alors, tout sous-intervalle compact de $\mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$ contient au plus un nombre fini de valeurs propres de H_1, chacune d'entre-elles étant de multipicité finie. Si, de plus, $H_0^{-1/2} y\partial_y V_1 H_0^{-1}$ et $H_0^{-1} y^2 \partial_y^2 V_1 H_0^{-1}$ sont bornés dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{S}_\ell)$ alors $\sigma_{\mathrm{sc}}(H_1) = \emptyset$.*

En effet, comme $\mathrm{Dom}(A) \cap \mathcal{H}_2$ est dense dans $\mathcal{H}_2$ et que $[H_1, \imath A]$ est borné de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathcal{H}_{-2}$, l'inégalité de Mourre (57) implique par un [35]raisonnement classique de la théorie de Mourre que H_1 admet au plus un nombre fini de valeurs propres dans $\Delta_E(\delta_0)$. La première partie du Théorème 14 s'obtient alors par le même argument de compacité que celui utilisé dans la justification du Théorème 11. Ensuite E étant fixé dans $(\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1}) \setminus \overline{\sigma_{\mathrm{p}}(H_1)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, un procédé analogue à celui de [22, Lemme 4.8] permet de transformer (57) en

$$\mathbb{P}_1(\Delta_E(\delta))[H_1, \imath A]\mathbb{P}_1(\Delta_E(\delta)) \geq (C/2)\mathbb{P}_1(\Delta_E(\delta_0)),$$

pour peu que $\delta \in (0, \delta_0)$ soit suffisamment petit. Les hypothèses supplémentaires faites sur V_1 garantissant que $[H_1, \imath A]$ est borné de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathcal{H}_{-1}$ et que $[[H_1, \imath A], \imath A]$ se prolonge en un opérateur borné de $\mathcal{H}_2$ dans $\mathcal{H}_{-2}$, la théorie de Mourre impose ensuite $\sigma_{\mathrm{sc}}(H_1) \cap ((\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1}) \setminus \overline{\sigma_{\mathrm{p}}(H_1)}) = \emptyset$. Ainsi $\sigma_{\mathrm{sc}}(H_1) \cap (\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1}) = \emptyset$ car $(\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1}) \cap \overline{\sigma_{\mathrm{p}}(H_1)}$ est au plus discret. Finalement, comme $\mathcal{E}_1 = \inf \sigma_{\mathrm{ess}}(H_1)$ on a $\sigma_{\mathrm{sc}}(H_1) \cap (-\infty, \mathcal{E}_1) = \emptyset$, et donc $\sigma_{\mathrm{sc}}(H_1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}) = \emptyset$, ce qui entraîne bien l'assertion de la seconde partie du Théorème 14 puisque $\mathcal{Z}$ est un ensemble discret.

2.4 Etude de la fonction de décalage spectral

2.4.1 Définition et hypothèse de décroissance sur le potentiel

Fonction de décalage spectral dans un cadre abstrait. Commençons par rappeler la définition de la [36]*fonction de décalage spectral*, associée à deux opérateurs autoadjoints et inférieurement bornés $\mathbb{H}_0$ et $\mathbb{H}_1$, agissant dans le même espace de Hilbert. On suppose pour cela disposer de deux constantes $\gamma > 0$ et $E_0 < \inf \sigma(\mathbb{H}_0) \cup \sigma(\mathbb{H}_1)$ pour lesquelles $\mathbb{H}_0$ et $\mathbb{H}_1$ obéissent à la condition

$$(\mathbb{H}_1 - E_0)^{-\gamma} - (\mathbb{H}_0 - E_0)^{-\gamma} \in \mathcal{S}_1. \tag{58}$$

Alors il existe une unique fonction $\xi(\cdot; \mathbb{H}_1, \mathbb{H}_0) \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}; \langle E \rangle^{-\gamma-1} \mathrm{d}E)$, identiquement nulle sur $(-\infty, E_0)$, vérifiant la formule de Lifshits-Krein (voir [74] et [67])

$$\mathrm{Tr}(f(\mathbb{H}_1) - f(\mathbb{H}_0)) = \int_{\mathbb{R}} \xi(E; H_1, H_0) f'(E) \mathrm{d}E,$$

35. Voir [75], [22, Théorème 4.7] et [52].
36. Notée en abrégé FDS dans la suite.

pour tout $f \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. La fonction $\xi(.;\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_0)$ est la *FDS associée à la paire d'opérateurs* $(\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_0)$.
Si $E < \inf \sigma(\mathbb{H}_0)$, alors le spectre de $\mathbb{H}_1$ situé en dessous de E ne peut être que vide ou discret, et pour presque tout $E < \inf \sigma(\mathbb{H}_0)$ on a de plus

$$\xi(E;\mathbb{H}_1,\mathbb{H}_0) = -N(E;\mathbb{H}_1), \tag{59}$$

où $N(E;\mathbb{H}_1) = \text{rang } \mathbb{P}_1(-\infty,E)$.

FDS associée à (H_1,H_0). Définissons maintenant la FDS associée à (H_1,H_0). On dit que V_1 satisfait la condition $\mathcal{D}_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, s'il existe $c>0$ tel que

$$|V_1(x,y)| \leq c\langle y\rangle^{-\alpha},\ (x,y) \in \mathcal{S}_\ell.$$

Supposons que V_1 satisfait $\mathcal{D}_\alpha$ avec $\alpha > 1$. Alors (58) est vraie en prenant $\mathbb{H}_1 = H_1$, $\mathbb{H}_0 = H_0$ et $\gamma = 1$, de sorte que la FDS $\xi(\cdot;H_1,H_0)$ est bien définie dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R};\langle E\rangle^{-2}\mathrm{d}E)$.

2.4.2 Représentation de la FDS et propriétés en dehors des seuils

Index d'une paire de Fredholm de projections orthogonales. Une paire de projections orthogonales (P,Q) est dite *de Fredholm* si $\{-1,+1\} \cap \sigma_{\text{ess}}(P-Q) = \emptyset$. En particulier, si $P-Q \in \mathcal{S}_\infty$ alors la paire (P,Q) est de Fredholm. Pour toute paire de projections orthogonales (P,Q) de Fredholm, on définit

$$\text{index}(P,Q) = \dim \text{Ker}(P-Q-I) - \dim \text{Ker}(P-Q+I).$$

Index d'une paire d'opérateurs autoadjoints. Soient M et $\tilde{M}$ deux opérateurs bornés autoadjoints. Si les projections spectrales $\mathbb{P}_{\tilde{M}}(-\infty,0)$ et $\mathbb{P}_M(-\infty,0)$ forment une paire de Fredholm, on note

$$\text{ind}(\tilde{M},M) = \text{index}(\mathbb{P}_{\tilde{M}}(-\infty,0),\mathbb{P}_M(-\infty,0)).$$

Une condition suffisante assurant que la paire $(\mathbb{P}_{\tilde{M}}(-\infty,0),\mathbb{P}_M(-\infty,0))$ est de Fredholm est $\tilde{M} = M + A$ où M est un opérateur autoadjoint borné vérifiant $0 \notin \sigma_{\text{ess}}(M)$, et $A = A^* \in \mathcal{S}_\infty$. Voyons maintenant comment ceci s'applique au cas étudié ici.
Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On note $\psi_r(\cdot;k) = \psi_{r,D}^{(2)}(\cdot;k) : I_\ell \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$, la fonction propre à valeurs réelles et normalisée dans $\mathrm{L}^2(I_\ell)$ de $h_0(k)$ associée à $E_r(k)$ et $p_r(k) = \langle\cdot,\psi_r(\cdot;k)\rangle\psi_r(\cdot;k)$ la projection orthogonale sur la droite vectorielle engendrée par $\psi_r(\cdot;k)$. Posons $P_r = \mathcal{F}_y^*\left(\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} p_r(k)\mathrm{d}k\right)\mathcal{F}_y$ et $P_r^+ = \sum_{m=r}^{+\infty} P_m$. Pour tout $z \in \mathbb{C}_+$ on définit ensuite $T_r(z) = |V_1|^{1/2}P_r(H_0-z)^{-1}|V_1|^{1/2}$ et $T_r^+(z) = |V_1|^{1/2}P_r^+(H_0-z)^{-1}|V_1|^{1/2}$. Lorsque V_1 satisfait $\mathcal{D}_\alpha$ pour un certain $\alpha > 1$, on a, en vertu de [18, Lemmes 4.5 et 4.6] :

(a) Pour tout $E \in \mathbb{R}\setminus\{\mathcal{E}_r\}$ la limite $T_r(E) = \lim_{\delta\downarrow 0} T_r(E+\imath\delta)$ existe dans $\mathcal{S}_1$, et $T_r : \mathbb{R}\setminus\{\mathcal{E}_r\} \to \mathcal{S}_1$ est continue. De plus, quel que soit $\lambda_0 > 0$ il existe une constante $C_r(\lambda_0) > 0$ telle que :

$$\|T_r(E)\|_1 \leq C_r|E-\mathcal{E}_r|^{-1/2},\ 0 < |E-\mathcal{E}_r| < \lambda_0.$$

(b) Pour tout $E \in (-\infty,\mathcal{E}_r)$ la limite $T_r^+(E) = T_r^+(E)^* = \lim_{\delta\downarrow 0} T_r^+(E+\imath\delta)$ existe au sens de la norme des opérateurs dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{S}_\ell)$. De plus pour tout $z \in \overline{\mathbb{C}_+}\setminus[\mathcal{E}_r,+\infty)$, $T_r^+ \in \mathcal{S}_2$ et $T_r^+ : \overline{\mathbb{C}_+}\setminus[\mathcal{E}_r,+\infty) \to \mathcal{S}_2$ est continue. Enfin il existe une constante $C_+ > 0$ dépendant de V_1 mais indépendante de E et de r, telle que :

$$\|T_r^+(E)\|_2 \leq C_+\mathcal{E}_r(\mathcal{E}_r-E)^{-1},\ E \in (-\infty,\mathcal{E}_r).$$

Pour tout $E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$ on considère ensuite

$$T(E) = \sum_{r=1}^{q(E)} T_r(E) + T_{q(E)+1}^{+}(E),$$

où $q(E)$ désigne l'indice du seuil le plus proche de E s'il n'y en a qu'un, ou le plus grand indice des deux seuils les plus proches de E lorsqu'il y en a deux. Il résulte facilement des propriétés (a) et (b) ci-dessus que $\mathrm{Re}\,(T(E)) + t\mathrm{Im}\,(T(E)) \in \mathcal{S}_\infty$, $t \in \mathbb{R}$. De plus, l'opérateur J de multiplication par la fonction

$$J(x,y) = \text{signe } V_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } V_1(x,y) \geq 0 \\ -1 & \text{si } V_1(x,y) < 0, \end{cases}$$

étant autoadjoint borné dans $\mathrm{L}^2(\mathcal{S}_\ell)$, et tel que $0 \notin \sigma_{\mathrm{ess}}(M)$, alors pour $E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$ et $t \in \mathbb{R}$, les projections $\mathbb{P}_J(-\infty, 0)$ et $\mathbb{P}_{J+\mathrm{Re}(T(E))+t\mathrm{Im}(T(E))}(-\infty,0)$ forment une paire de Fredholm.

Représentation de la FDS et comportement dehors des seuils. Dans le cas où V_1 satisfait $\mathcal{D}_\alpha$ avec $\alpha > 1$, il est possible de donner une représentation de $\xi(E; H_1, H_0)$ qui est un cas particulier de la représentation générale de la FDS due à F. Gesztesy, K. Makarov, et A. Pushnitski (voir [80], [55], [81]). Elle s'écrit

$$\xi(E; H_1, H_0) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{ind}(J + \mathrm{Re}\,(T(E)) + t\mathrm{Im}\,(T(E))\,, J)\mathrm{d}\mu(t),\ \ \mu(t) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}, \tag{60}$$

pour tout $E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$, ce qui implique notamment

$$|\xi(E; H_1, H_0)| \leq \frac{2}{s} \sum_{r=1}^{q(E)} \|T_r(E)\|_1 + \frac{4}{s^2}\|T_{q(E)+1}^{+}(E)\|_2^2 + 2q(E),\ \ E \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}. \tag{61}$$

A partir des propriétés (a) et (b) énoncées ci-dessus, (60)-(61) entraînent la :

Proposition 15. *([18, Proposition 2.1]) Si V_1 vérifie $\mathcal{D}_\alpha$ avec $\alpha > 1$ alors la FDS $\xi(\cdot; H_1, H_0)$ est bornée sur chaque sous-ensemble de $\mathbb{R}\setminus\mathcal{Z}$ et continue sur $\mathbb{R}\setminus(\mathcal{Z} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(H))$.*

2.4.3 Comportement au voisinage des seuils

Le comportement au voisinage des seuils de la FDS d'une paire d'opérateurs de Schrödinger 3D avec champ magnétique constant, a déjà été décrit dans [42]. Dans ce cas les seuils coïncident avec les niveaux de Landau, et la FDS admet des singularités en ces points.

Dans le cas bidimensionnel examiné ici, le comportement de la FDS au voisinage des seuils de H_0 est similaire à celui de la FDS au voisinage de 0 d'une paire d'Hamiltoniens effectifs, qui sont des opérateurs de Schrödinger monodimensionnels. Il résulte de ceci que si le taux de décroissance α de V_1 est contenu dans l'intervalle $(1,2)$ alors la FDS admet une singularité en chacun des seuils, dont le terme dominant peut être explicitement décrit. Si $\alpha > 2$ par contre, la FDS reste bornée au voisinage des seuils.

Hamiltoniens effectifs. Pour tout $\varepsilon \in (-1,1)$ on considère le *potentiel effectif*

$$w_{r,\varepsilon}(y) := \int_{I_\ell} |V_1(x,y)|(J(x,y)-\varepsilon)^{-1}\psi_r(x;0)^2\mathrm{d}x,\ \ y \in \mathbb{R},$$

de sorte que l'on a $w_{r,0}(y) = \int_{I_\ell} V_1(x,y)\psi_r(x;0)^2 \mathrm{d}x$, ainsi que les *Hamiltoniens effectifs*

$$\mathfrak{h}_{0,r} = -\mu_r \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2},\ \mathfrak{h}_{1,r}(\varepsilon) = \mathfrak{h}_{0,r} + w_{r,\varepsilon},$$

le réel μ_r étant défini par (44). Remarquons que si V_1 satisfait $\mathcal{D}_\alpha$ avec $\alpha > 1$, alors (58) est vérifiée pour $\mathbb{H}_1 = \mathfrak{h}_{1,r}(\varepsilon)$, $\mathbb{H}_0 = \mathfrak{h}_{0,r}$, et $\gamma = 1$, ce qui garantit que la FDS $\xi(\cdot;\mathfrak{h}_{1,r}(\varepsilon),\mathfrak{h}_{0,r})$, $r \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon \in (-1,1)$, est bien définie.
Pour $\lambda > 0$ posons

$$\theta_\beta(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta > 1/2 \\ |\ln \lambda| & \text{si } \beta = 1/2 \\ \lambda^{-\frac{1}{2}+\beta} & \text{si } 0 < \beta < 1/2, \end{cases}$$

et si $\lambda < 0$, $\theta_\beta(\lambda) = 1$ pour tout $\beta > 0$.

Théorème 16. *([18, Théorème 2.2]) Supposons que V_1 obéit à $\mathcal{D}_\alpha$ avec $\alpha > 1$ et soit $r \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors, pour chaque $\varepsilon \in (0,1)$ on a*

$$\xi(\lambda;\mathfrak{h}_{1,r}(-\varepsilon),\mathfrak{h}_{0,r}) + O(\theta_{2\gamma}(\lambda)) \leq \xi(\mathcal{E}_r + \lambda; H_1, H_0) \leq \xi(\lambda;\mathfrak{h}_{1,r}(\varepsilon),\mathfrak{h}_{0,r}) + O(\theta_{2\gamma}(\lambda)),$$

lorsque $\lambda \to 0$, pour tout $\gamma \in (0,(\alpha-1)/2)$, $\gamma \leq 1$.

Supposons maintenant que $\alpha \in (1,2)$. Alors il existe $\gamma \in (0,(\alpha-1)/2)$, $\gamma \leq 1$, tel que $\theta_{2\gamma}(\lambda) = o(|\lambda|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}})$ lorsque $\lambda \to 0$. De ce fait, les résultats bien connus concernant le comportement asymptotique de la FDS $\xi(\lambda;\mathfrak{h}_{1,r}(\varepsilon),\mathfrak{h}_{0,r})$ lorsque $\lambda \to 0$ (voir [82, Théorème XIII.82] dans le cas $\lambda \uparrow 0$, et [94] dans le cas $\lambda \downarrow 0$), entraînent le :

Corollaire 17. *([18, Corollaire 2.1]) Soient V_1 satisfaisant $\mathcal{D}_\alpha$ avec $\alpha \in (1,2)$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Supposons pour chaque $\varepsilon \in (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ où $\varepsilon_0 \in (0,1)$ est fixé, qu'il existe deux nombres réels $\omega_{r,\pm}(\varepsilon)$ vérifiant*

$$\lim_{y \to \pm\infty} |y|^\alpha w_{r,\varepsilon}(y) = \omega_{r,\pm}(\varepsilon)$$

uniformément par rapport à ε. Alors, on a

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}} \xi(\mathcal{E}_r - \lambda; H_1, H_0) = -\mu_r^{-1/2} \mathcal{C}_\alpha \Omega_r^-, \tag{62}$$

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}} \xi(\mathcal{E}_r + \lambda; H_1, H_0) = -\mu_r^{-1/2} \mathcal{C}_\alpha \left(\csc(\pi/\alpha)\Omega_r^- + \cot(\pi/\alpha)\Omega_r^+\right),$$

avec $\mathcal{C}_\alpha = \frac{1}{\pi}\int_0^1 (t^{-\alpha}-1)^{1/2}\mathrm{d}t$ et $\Omega_r^\pm = \sum_{\varsigma=+,-} \omega_{r,\varsigma}(0)_\pm^{1/\alpha}$, les quantités $\omega_{r,\varsigma}(0)_+$ et $\omega_{r,\varsigma}(0)_-$, $\varsigma = +,-$, désignant respectivement les parties positive et négative de $\omega_{r,\varsigma}(0)$.

On remarque que si $r = 1$ et $\lambda > 0$, alors $\xi(\mathcal{E}_1 - \lambda; H_1, H_0) = -N(\mathcal{E}_1 - \lambda; H_1)$ d'après (59), le spectre de H_1 situé en dessous de $\mathcal{E}_1$ étant discret si V_1 obéit à $\mathcal{D}_\alpha$ pour n'importe quel $\alpha > 0$. De plus (62) entraîne :

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}} N(\mathcal{E}_1 - \lambda; H_1) = \mu_r^{-1/2} \mathcal{C}_\alpha \Omega_1^-,$$

pour tout $\alpha \in (0,2)$.
De façon analogue, les résultats décrivant le comportement asymptotique de la FDS $\xi(\lambda;\mathfrak{h}_{1,r}(\varepsilon),\mathfrak{h}_{0,r})$ dans le cas $\alpha = 2$ (voir [65]), donnent le :

Corollaire 18. *([18, Corollaire 2.1]) Sous les conditions du Corollaire 17 avec $\alpha = 2$, on a pour tout $r \in \mathbb{N}^*$*

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} |\ln \lambda|^{-1} \xi(\mathcal{E}_r - \lambda; H_1, H_0) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\varsigma=+,-} \left(\frac{\omega_{r,\varsigma}(0)}{\mu_r} + \frac{1}{4}\right)_-^{1/2}.$$

De plus, si $\omega_{r,\pm}(0) > -\mu_r/4$, alors $\xi(\mathcal{E}_r - \lambda; H_1, H_0) = O(1)$ lorsque $\lambda \downarrow 0$.

Finalement, l'opérateur $-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2} + w(y)$, $y \in \mathbb{R}$ n'ayant qu'un nombre fini de valeurs propres négatives si $w(y) = o(|y|^{-2})$ lorsque $|y| \to \infty$ (voir [82]), la FDS est bornée à gauche de $\mathcal{E}_r$, $r \in \mathbb{N}^*$, dans le cas où $\alpha > 2$, d'après le Théorème 16. En fait, il en va de même à droite des seuils :

Corollaire 19. *([18, Corollaire 2.3]) Si V_1 satisfait $\mathcal{D}_\alpha$ avec $\alpha > 2$ alors pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ on a*

$$\xi(\mathcal{E}_r + \lambda; H_1, H_0) = O(1), \ \ \lambda \to 0.$$

3 Propriétés spectrales des guides d'ondes électromagnétique et quantique

3.1 Principe d'absorption limite pour opérateurs analytiquement fibrés

Cette section est consacrée à la description succinte d'une méthode effective de démonstration d'un principe d'absorption limite (généralement noté PAL, en abrégé, dans la suite) pour une classe assez générale d'opérateurs analytiquement fibrés. Ces derniers sont supposés unitairement équivalents à un opérateur de multiplication Λ dans $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ par une famille infinie de fonctions réelles analytiques, appelées *courbes de dispersion*, obéissant à deux propriétés asymptotiques ad-hoc. Ces deux hypothèses sont suffisamment générales pour être vérifiées par les principaux opérateurs de la physique mathématique modélisant les phénomènes de propagation ondulatoire dans un guide cylindrique [37] fermé et invariant dans la direction infinie. Si c'est le cas particulier de l'opérateur de Maxwell du second ordre qui est plus spécifiquement décrit dans ce qui suit, ceci ne restreint en rien la généralité du résultat obtenu car il est apparent que la méthode utilisée peut tout aussi bien s'appliquer directement à Λ.

3.1.1 Opérateurs analytiquement fibrés

Etant donnée une famille de fonctions analytiques $\lambda_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, satisfaisant les deux conditions asymptotiques suivantes,

$$\lim_{k\to\pm\infty} \lambda_n(k) = +\infty,\ n \in \mathbb{N}^*, \tag{63}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{k\in\mathbb{R}} \lambda_n(k) = +\infty, \tag{64}$$

on considère l'opérateur de multiplication Λ dans $\mathcal{Y} = \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ par la famille de $\{\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$, défini par :

$$\Lambda f = (\lambda_n f_n)_{n\geq 1},\ \forall f = (f_n)_{n\geq 1} \in \mathrm{Dom}(\Lambda) = \{(g_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{Y},\ (\lambda_n g_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{Y}\}.$$

C'est évidemment un opérateur autoadjoint dans $\mathcal{Y}$. De plus, eu égard à (63), aucune des fonctions $k \mapsto \lambda_n(k)$, $n \in \mathbb{N}^*$, n'est constante, si bien que le spectre de Λ est absolument continu, avec $\sigma(\Lambda) = \sigma_{\mathrm{ac}}(\Lambda) = \overline{\{\lambda_n(k), k \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*\}}$.

Seuils. La fonction $k \mapsto \lambda_n(k)$, $n \in \mathbb{N}^*$, étant analytique, l'ensemble $\mathcal{K}_n = \{k \in \mathbb{R},\ \lambda_n'(k) = 0\}$ est discret et donc au plus dénombrable. Notant N_n^+ le cardinal de $\mathcal{K}_n \cap \mathbb{R}_+$ on pose $\mathcal{J}_n^+ = \{j \in \mathbb{N},\ j < N_n^+\}$. Il existe donc une fonction strictement croissante $j \mapsto k_{n,j}$ telle que $\mathcal{K}_n^+ = \{k_{n,j},\ j \in \mathcal{J}_n^+\}$. Lorsque N_n^+ est fini on pose $k_{N_n^+,n} = +\infty$ et $\overline{\mathcal{J}_n^+} = \mathcal{J}_n^+ \cup \{N_n^+\}$. Si N_n^+ est infini on convient que $\overline{\mathcal{J}_n^+} = \mathcal{J}_n^+$. En notant ensuite N_n^- le cardinal de $\mathcal{K}_n \cap \mathbb{R}_-^*$ et $\mathcal{J}_n^- = \{j \in \mathbb{Z}_-^*,\ j \geq -N_n^-\}$, il existe de façon similaire une fonction strictement croissante $j \mapsto k_{n,j}$ telle que $\mathcal{K}_n \cap \mathbb{R}_-^* = \{k_{n,j},\ j \in \mathcal{J}_n^-\}$. On pose enfin $k_{-N_n^- -1,n} = -\infty$ et $\overline{\mathcal{J}_n^-} = \{-N_n^- - 1\} \cup \mathcal{J}_n^-$ lorsque N_n^- est fini alors que $\overline{\mathcal{J}_n^-} = \mathcal{J}_n^-$ dans le cas contraire. Pour résumer, on a $\mathcal{K}_n = \{k_{n,j},\ j \in \mathcal{J}_n\}$ avec $\mathcal{J}_n = \mathcal{J}_n^- \cup \mathcal{J}_n^+$, et $k_{n,j} < k_{n,j+1}$ pour tout $(j, j+1) \in \mathcal{J}_n^2$. Chacun des réels $\mathcal{E}_{n,j} = \lambda_n(k_{n,j})$, $j \in \mathcal{J}_n$, $n \in \mathbb{N}^*$, est un seuil dans le spectre de Λ et l'on pose $\mathcal{Z} = \{\mathcal{E}_{n,j},\ n \in \mathbb{N}^*,\ j \in \mathcal{J}_n\}$. Tout réel $k_{n,j}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathcal{J}_n$, est donc un zéro de la fonction $k \mapsto \lambda_n(k) - \mathcal{E}_{n,j}$, de multiplicité $N_{n,j} \geq 2$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \overline{\mathcal{J}_n} = \{-N_n^- - 1\} \cup \mathcal{J}_n$, λ_n est un difféomorphisme analytique de $(k_{n,j}, k_{n+1,j})$ sur $I_{n,j} = \lambda_n((k_{n,j}, k_{n,j+1}))$, dont la fonction réciproque est notée $\xi_{n,j}$ dans la suite.

37. Cela signifie que la section du guide d'onde est bornée.

Modèles mathématiques concernés. Comme cela sera explicité dans la section 3.1.2 sur l'exemple particulier de l'opérateur de Maxwell du second ordre, les opérateurs mathématiques usuels modélisant les phénomènes de propagation ondulatoire (acoustique, élastique, électromagnétique, etc...) dans un guide d'onde cylindrique fermé et invariant dans la direction infinie, sont unitairement équivalents à Λ. Par ailleurs, s'il est bien connu (voir [10] ou [21]) que les courbes de dispersion de l'opérateur acoustique sont paires et strictement monotones sur $\mathbb{R}_{\pm}^*$ (ce qui implique que $N_n^- = 0$, $N_n^+ = 1$, et que $\mathcal{E}_{n,0} = \lambda_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ dans ce cas), il a été prouvé dans [15] pour l'opérateur élastique, que λ_n', $n \in \mathbb{N}^*$, peut changer de signe sur $\mathbb{R}_{\pm}^*$. De plus, ce type de comportement ne peut être formellement écarté dans le cas de l'opérateur de Maxwell. Ceci justifie que la méthode générale développée dans les sections 3.1.3–3.1.4 doive impérativement prendre en compte la possibilité d'un nombre infini de seuils pour chacune des fonctions λ_n, $n \in \mathbb{N}^*$.

3.1.2 Représentation spectrale de l'opérateur de Maxwell dans un guide d'onde fermé

Soit ω un ouvert borné connexe et simplement connexe de $\mathbb{R}^2$, de frontière $\partial\omega$ supposée Lipschitz-continue. On considère un guide d'onde électromagnétique parfaitement conducteur $\Omega = \omega \times \mathbb{R}$. Tout point $x \in \Omega$ est noté $x = (x_t, x_3)$ avec $x_t = (x_1, x_2) \in \omega$. Le milieu de propagation est supposé stratifié, ce qui signifie que la perméabilité magnétique $\mu(x) = \mu(x_t)$ et permittivité diélectrique $\varepsilon(x) = \varepsilon(x_t)$ ne dépendent que de la variable transverse x_t. On suppose de plus que

$$\mu^{\pm 1}, \varepsilon^{\pm 1} \in \mathrm{L}^\infty(\omega). \tag{65}$$

L'opérateur de Maxwell elliptique. Le champ électrique $u = u(x,t)$ se propageant dans Ω satisfait, en vertu des équations de Maxwell, le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t^2 u + \mathcal{M}u = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ \mathrm{div}(\varepsilon u) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \\ u \wedge \nu = 0 & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+^*, \end{array} \right.$$

où $\mathcal{M}u = \varepsilon^{-1}\,\mathrm{rot}(\mu^{-1}\,\mathrm{rot}\, u)$. L'opérateur différentiel elliptique du second ordre $\mathcal{M}$ admet une représentation autoadjointe M dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega)^3,\ \mathrm{div}(\varepsilon u) = 0\}$ muni du produit scalaire de $\mathrm{L}^2(\Omega; \varepsilon(x)\mathrm{d}x)^3$, de domaine

$$\mathrm{Dom}(M) = \{u \in \mathrm{H}(\mathrm{rot}; \Omega) \cap \mathcal{H},\ \gamma_\tau u = 0,\ \mu^{-1}\,\mathrm{rot}\, u \in \mathrm{H}(\mathrm{rot}; \Omega)\},$$

où $\mathrm{H}(\mathrm{rot}; \Omega) = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega)^3,\ \mathrm{rot}\, u \in \mathrm{L}^2(\Omega)^3\}$ et γ_τ désigne l'unique application linéaire continue de $\mathrm{H}(\mathrm{rot}; \Omega)$ dans $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)^3$ vérifiant $\gamma_\tau u = u \wedge \nu$ si $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\overline{\Omega})^3$. La permittivité ε ne dépendant que de x_t, la transformation de Fourier partielle $\mathcal{F}_{x_3}$ dans la direction x_3 est unitaire de $\mathcal{H}$ dans $\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \mathcal{H}(k)\mathrm{d}k$, où

$$\mathcal{H}(k) = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathrm{L}^2(\omega)^3,\ \partial_{x_1}(\varepsilon u_1) + \partial_{x_2}(\varepsilon u_2) - \imath k \varepsilon u_3 = 0\},\ k \in \mathbb{R}.$$

Du fait de l'invariance du système dans la direction x_3, M est unitairement équivalent à l'intégrale directe sur $\mathbb{R}$ d'une famille d'opérateurs $M(k)$, autoadjoints dans $\mathcal{H}(k)$:

$$M = \mathcal{F}_{x_3}^* \left(\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} M(k)\mathrm{d}k \right) \mathcal{F}_{x_3}. \tag{66}$$

Analyticité et propriétés asymptotiques des courbes de dispersion. La section ω étant bornée, la résolvante de chacun des $M(k)$, $k \in \mathbb{R}$, est compacte, et le spectre de $M(k)$ est discret. Il existe deux familles analytiques réelles par rapport à k, $\{\lambda_n(k),\ n \in \mathbb{N}^*\}$ et $\{\psi_n(k),\ n \in \mathbb{N}^*\}$, la seconde étant une base orthonormale de $\mathcal{H}(k)$, vérifiant pour tout $k \in \mathbb{R}$:

(a) $\sigma(M(k)) = \{\lambda_n(k),\ n \in \mathbb{N}^*\}$,

(b) $\psi_n(k)$, $n \in \mathbb{N}^*$, est fonction propre de $M(k)$ associée à $\lambda_n(k)$.

Ce résultat, bien que très classique, n'est pas conséquence directe de la théorie des perturbations analytiques. En effet, la famille holomorphe $M(k)$ dûment prolongée à $k \in \mathbb{C}$, n'est même pas de type (B) au sens de Kato (voir [60, Section VII.4.4]), car le domaine de $M(k)$ dépend du paramètre k. Il est néanmoins possible de surmonter cette difficulté technique (voir [88, Proposition 2.1]) en raisonnant plutôt sur les fibres $A(k)$, $k \in \mathbb{C}$, de l'opérateur "étendu" $A = M \oplus 0$, associé à la décomposition orthogonale de Weyl-Hodge $\mathrm{L}^2(\Omega; \varepsilon(x_t)\mathrm{d}x)^2 = \mathcal{H} \oplus \nabla \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, et en tirant parti du fait que $\inf_{k\in\mathbb{R}} \sigma_{\mathrm{d}}(A_k) > 0$.
Grâce aux hypothèses (65), on vérifie que les courbes de dispersion λ_n satisfont par ailleurs les propriétés (63)-(64), qui sont essentielles à la mise en place d'un PAL pour M.

Système complet de fonctions propres généralisées. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}$, $\Psi_n(k) : x \mapsto (2\pi)^{-1/2} \mathrm{e}^{\imath k x_3} (\psi_n(k))(x_t)$ est fonction propre[38] généralisée de M associée à $\lambda_n(k)$ et la famille $\{\Psi_n(k),\ (n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}\}$ est complète dans $\mathcal{H}$. En effet, pour tout $f \in \mathcal{H}$, $X \mapsto \int_{\{x\in\Omega,\ |x_3|<X\}} \varepsilon(x_t) \langle f(x), (\Psi_n(k))(x)\rangle_{\mathbb{C}^3} \mathrm{d}x$ admet une limite $k \mapsto \tilde{f}_n(k) \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ lorsque X tend vers l'infini, et la transformation $\mathcal{U} : f \mapsto (\tilde{f}_n)_{n\geq 1}$ est unitaire de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{Y}$ en vertu de (66). Evidemment $\mathcal{U}$ réduit M en ce sens que $\mathcal{U}M\mathcal{U}^*$ est l'opérateur de multiplication Λ dans $\mathcal{Y}$ par la famille $\{\lambda_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$. Ainsi, $R_M(z) = \mathcal{U} R_L(z) \mathcal{U}^*$ pour tout $z \in \mathbb{C}^\pm = \{z \in \mathbb{C},\ \pm \mathrm{Im}\,(z) > 0\}$, où $R_H(z)$ désigne la résolvante $(H - z)^{-1}$ de $H = \Lambda$ ou M, de sorte que

$$\langle R_M(z) f, g\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n\geq 1} r_n(z),\ f, g \in \mathcal{H},\ z \in \mathbb{C}^\pm, \tag{67}$$

avec $r_n(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{h_n(k)}{\lambda_n(k)-z} \mathrm{d}k$ et $h_n(k) = \tilde{f}_n(k) \overline{\tilde{g}_n(k)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{R}$.

3.1.3 Intégrales de Cauchy singulières

La fonction $z \mapsto R_M(z) = (M - z)^{-1}$ est analytique de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, et il est bien connu que $\lim_{z\to\tau} \|R_M\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = +\infty$ si $\tau \in \sigma(M)$. L'objectif est de construire une topologie adaptée pour laquelle $z \to R_M(z)$ se prolonge sur chacun des demi-plans inférieur ou supérieur $\overline{\mathbb{C}^\pm}$, en une une fonction localement höldérienne $R_M^\pm$. Ce résultat, connu sous le nom de principe d'absorption limite (PAL en abrégé) pour l'opérateur M, permet[39] notamment de caractériser le comportement de la solution du problème de Cauchy

$$\partial_t^2 u + Mu = \mathrm{e}^{-\imath t\sqrt{\tau}} f(x),\ \tau > 0,$$

avec conditions initiales $u(x,0) = \partial_t(x,0) = 0$, pour n'importe quelle fonction source $f \in \mathrm{L}^{2,s}(\Omega)^3$, $s > 3/2$, où l'on note :

$$\mathrm{L}^{2,s}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C} \text{ mesurable},\ (x_t, x_3) \mapsto (1 + x_3^2)^{s/2} u(x_t, x_3) \in \mathrm{L}^2(\Omega)\}.$$

En effet, on obtient (voir par exemple [66, Théorème 1.1]) dans ce cas que

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{-\imath t\sqrt{\tau}} R_M^\pm(\tau) f(x) + o(1),\ t \to \pm\infty,$$

pour la topologie de la norme de $\mathrm{L}^{2,-s}(\Omega)^3$, ce qui permet ensuite d'établir l'existence et la complétude des opérateurs d'onde associés à M.

38. Elle vérifie en effet $\Psi_n(k) \in \mathrm{Dom}(M)_{loc} = \{u,\ x \mapsto \varphi(x_3) u(x) \in \mathrm{Dom}(M),\ \forall \varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})\}$ et $(\mathcal{M}\Psi_n(k))(x) = \lambda_n(k)(\Psi_n(k))(x)$ p.p. $x \in \Omega$.

39. Sous certaines conditions additionnelles portant sur ε et μ, dont une hypothèse de décroissance de type "short range" sur la conductivité $c = \varepsilon\mu$.

Description de la méthode utilisée. La stratégie développée dans [88] en vue de l'obtention d'un PAL pour M utilise les espaces fonctionnels hilbertiens $\mathcal{H}^s = \mathcal{H} \cap \mathrm{L}^{2,s}(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$, munis du produit scalaire de $\mathrm{L}^2(\Omega; \varepsilon(x)(1+x_3^2)^s \mathrm{d}x)^3$. Si $s > 0$ les injections $\mathcal{H}^s \hookrightarrow \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}^{-s}$ sont continues de sorte que $z \mapsto R_M^{\pm}(z)$ peut être interprétée comme une fonction analytique de $\mathbb{C}^{\pm}$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{H}^s, \mathcal{H}^{-s})$. La méthode consiste alors à prolonger la résolvante $R_M^{\pm}$ en un fonction continue sur $K \cap \overline{\mathbb{C}^{\pm}}$ pour n'importe quel sous-ensemble compact K de $\mathbb{C}$. Pour $s > 0$ convenablement choisi, il suffit pour cela de trouver deux constantes $\delta > 0$ et $C_M > 0$ satisfaisant

$$|\langle R_M^{\pm}(z')f, g\rangle_{\mathcal{H}} - \langle R_M^{\pm}(z)f, g\rangle_{\mathcal{H}}| \leq C_M \|f\|_{\mathcal{H}^s} \|g\|_{\mathcal{H}^s} |z - z'|^{\delta},\ z, z' \in K \cap \overline{\mathbb{C}^{\pm}}, \tag{68}$$

pour toutes fonctions f et g de $\mathcal{H}^s$. En effet, comme $\mathcal{H}^{-s} \subset (\mathcal{H}^s)'$ et que $\langle u, v\rangle_{(\mathcal{H}^s)', \mathcal{H}^s} = \langle u, v\rangle_{\mathcal{H}}$ pour tout $(u,v) \in \mathcal{H}^{-s} \times \mathcal{H}^s$, il s'ensuit alors de (68) que

$$\|R_M^{\pm}(z')f - R_M^{\pm}(z)f\|_{\mathcal{H}^{-s}} \leq C_M \|f\|_{\mathcal{H}^s} |z' - z|^{\delta},\ (z, z') \in K \cap \overline{\mathbb{C}^{\pm}},$$

pour chaque $f \in \mathcal{H}^s$, ce qui implique

$$\|R_M^{\pm}(z') - R_M^{\pm}(z)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}^s, \mathcal{H}^{-s})} \leq C_M |z' - z|^{\delta},\ (z, z') \in K \cap \overline{\mathbb{C}^{\pm}},$$

par application directe du théorème de prolongement des fonctions uniformément continues. Ceci justifie bien que $R_M^{\pm}$ se prolonge en une fonction continue sur $K \cap \overline{\mathbb{C}^{\pm}}$.

Intégrales de Cauchy singulières. Pour justifier (68), il suffit donc, eu égard à (67), de prolonger $z \mapsto r_n(z)$, $n \in \mathbb{N}^*$, continûment sur $K \cap \overline{\mathbb{C}^{\pm}}$. Si $n \in \mathbb{N}_K = \{n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_n^{-1}(K \cap \mathbb{R}) \neq \emptyset\}$ l'intégrale de Cauchy $r_n(z)$ est *a priori* singulière. Ceci n'est plus vrai lorsque $n \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}_K$, puisqu'il résulte alors de (63)-(64) que

$$d = \inf_{n \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}_K} \{|\lambda_n(k) - z|,\ k \in \mathbb{R},\ z \in K\} > 0.$$

Ainsi, comme $|h_n(k)| \leq A \|f\|_{\mathcal{H}^s} \|g\|_{\mathcal{H}^s}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{H}^s$ dès que $s > 1/2$, la constante $A > 0$ ne dépendant ni de f, ni de g, $\sum_{n \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}_K} r_n$ est donc Lipschitz-continue sur $K \cap \mathbb{C}^{\pm}$:

$$\left| \sum_{n \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}_K} r_n(z') - \sum_{n \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}_K} r_n(z) \right| \leq \frac{A \|f\|_{\mathcal{H}^s} \|g\|_{\mathcal{H}^s}}{d^2} |z' - z|,\ (z, z') \in (K \cap \mathbb{C}^{\pm})^2. \tag{69}$$

Fixons maintenant $n \in \mathbb{N}_K$. Pour tout $z \in K \cap \mathbb{C}^{\pm}$, on a $r_n(z) = \sum_{j \in \overline{\mathcal{J}_n}} r_{n,j}(z)$ avec $r_{n,j}(z) = \int_{k_{n,j}}^{k_{n,j+1}} \frac{h_n(k)}{\lambda_n(k) - z} \mathrm{d}k$, ce qui amène à considérer l'ensemble $\mathcal{J}_n^K = \{j \in \overline{\mathcal{J}_n},\ K \cap \overline{I_{n,j}} \neq \emptyset\}$. On a en effet

$$d_n = \inf\{|\lambda_n(k) - z|,\ j \in \overline{\mathcal{J}_n} \setminus \mathcal{J}_n^K,\ k \in \overline{(k_{n,j}, k_{n,j+1})},\ z \in K\} > 0,$$

directement à partir de (63), de sorte que $(\sum_{j \in \overline{\mathcal{J}_n} \setminus \mathcal{J}_n^K} r_{n,j}, d_n)$ peut être substitué à $(\sum_{n \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}_K} r_n, d)$ dans (69). Reste donc à examiner le comportement de

$$z \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}_K,\ j \in \mathcal{J}_n^K} r_{n,j}(z).$$

Comme $\mathbb{N}_K$ et $\mathcal{J}_n^K$, pour $n \in \mathbb{N}_K$, sont tous deux de cardinalité finie d'après (63)-(64), il suffit en fait d'examiner chacun des termes $r_{n,j}$, $n \in \mathbb{N}_K$, $j \in \mathcal{J}_n^K$, séparément. L'idée est de réexprimer $r_{n,j}$ en fonction de la variable spectrale $\lambda = \lambda_n(k)$,

$$r_{n,j}(z) = \int_{I_{n,j}} \frac{H_{n,j}(\lambda)}{\lambda - z} \mathrm{d}\lambda,\ \text{avec } H_{n,j}(\lambda) = \frac{(h_n \circ \xi_{n,j})(\lambda)}{(\lambda_n' \circ \xi_{n,j})(\lambda)}, \tag{70}$$

puis de prolonger continûment cette fonction à $K \cap \mathbb{R}$ par le théorème de Plemelj-Privalov (voir [76, Partie 1, Section 2.22]). Ceci requiert que la fonction $\lambda \mapsto H_{n,j}(\lambda)$ soit höldérienne sur $I_{n,j}$. Or, pour tout $s > 1/2$, le numérateur $h_n \circ \xi_{n,j}$ peut être rendu $(s-1/2)$-höldérien sur $I_{n,j}$ en choisissant f et g dans $\mathcal{H}^s$. Cependant, le dénominateur $\lambda_n' \circ \xi_{n,j}$ s'annulant en $K \cap \mathcal{Z}$, la nature du prolongement obtenu différe suivant que K évite les seuils ou non.

3.1.4 Principe d'absorption limite

Le comportement de la résolvante $z \mapsto R_M(z)$ au voisinage de $z = \tau \in \sigma(M)$ étant conditionné par le fait que τ est un seuil dans le spectre de M ou non, chacune de ces deux situations doit être examinée séparément.

PAL en dehors des seuils. Dans ce cas, le prolongement de la résolvante R_M en une fonction höldérienne sur $K \cap \overline{\mathbb{C}^{\pm}}$ s'obtient directement à partir des ingrédients précédents.

Théorème 20. *([88, Théorème 3.1]) Soient $s > 1/2$ et K un compact de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}$. Alors, pour tout $\delta \in (0,1]$ satisfaisant $\delta < s - 1/2$ il existe une constante $C_M = C_M(s, \delta, K) > 0$ satisfaisant*

$$\|R_M^{\pm}(z') - R_M^{\pm}(z)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H}^s, \mathcal{H}^{-s})} \leq C_M |z' - z|^{\delta},\ (z, z') \in (K \cap \overline{\mathbb{C}^{\pm}})^2.$$

Pour tout $f, g \in \mathcal{H}^s$ et chaque $\tau \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Z}$ on a de plus

$$\lim_{z \to \tau,\ \pm \mathrm{Im}(z) > 0} \langle R_M^{\pm}(z) f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n \geq 1} \left(\mathrm{v.p.} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{h_n(k)}{\lambda_n(k) - z} \mathrm{d}k \right) \pm \imath\pi \sum_{k \in \lambda_n^{-1}(\{\tau\})} \frac{h_n(k)}{|\lambda_n'(k)|} \right),$$

où $h_n(k) = \tilde{f}_n(k) \overline{\tilde{g}_n(k)}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}$.

PAL aux seuils. Etant donnés $\tau \in \mathcal{Z}$ et un compact K de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{Z} \cup \{\tau\}$, le problème supplémentaire à traiter ici est de trouver f et g rendant la fonction $z \mapsto r_{n,j}(z)$, $n \in \mathbb{N}_\tau = \{n \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_n^{-1}(\{\tau\}) \neq \emptyset\}$ et $j \in \mathcal{J}_n^\tau = \{i \in \mathcal{J}_n,\ \mathcal{E}_{n,i} = \tau\}$, höldérienne sur $K \cap \mathbb{C}^{\pm}$, et ceci alors que le dénominateur de $H_{n,j}$ défini par (70) s'annule sur K (en $\lambda = \mathcal{E}_{n,j} = \tau$). Comme λ_n' admet un zéro d'ordre $N_{n,j} - 1$ en $k_{n,j}$ il suffit pour cela que h_n se mette sous la forme suivante

$$h_n(k) = (k - k_{n,j})^{N_{n,j} - 1} \mathfrak{h}_n(k), \tag{71}$$

dans un voisinage de $k_{n,j}$, où $\mathfrak{h}_n$ est une fonction localement höldérienne. Ceci peut être effectivement réalisé en fixant $s > m + 1/2$ pour un certain $m \in \mathbb{N}_{N_{n,j}-1}^* = \{1, 2, \ldots, N_{n,j} - 1\}$, et $s' > m' + 1/2$ avec $m' = N_{n,j} - m$, de telle façon que $s + s' > N_{n,j}$, puis en choisissant $f \in \mathcal{NH}_{n,j,m}^s$ et $g \in \mathcal{NH}_{n,j,m'}^{s'}$, où

$$\mathcal{NH}_{n,j,m}^s = \left\{ f \in \mathcal{H}^s,\ \frac{\mathrm{d}^p \tilde{f}_n}{\mathrm{d}k^p}(k_{n,j}) = 0,\ p = 0, 1, \ldots, m-1 \right\},\ j \in \mathcal{J}_n,$$

est en fait un sous-espace [40] fermé de $\mathcal{H}^s$. En effet, comme $s + s' > N_{n,j}$, il existe bien $\mathfrak{h}_n$ localement θ-höldérienne, avec $\theta \in [0, (t + t' - 1)/2)$, $t = \min(1, s - m + 1/2)$ et $t' = (1, s' - m' + 1/2)$, pour laquelle h_n obéit à (71). La fonction $\xi_{n,j}$ étant par ailleurs $(1/N_{n,j})$-höldérienne au voisinage de $\mathcal{E}_{n,j}$, $z \mapsto r_{n,j}(z)$ est donc $(\theta/N_{n,j})$-höldérienne sur

40. Cela tient au fait que pour tout $f \in \mathcal{H}^s$, avec $s > m - 1/2$ pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$, chacune des fonctions $k \mapsto \tilde{f}_n(k)$, $n \in \mathbb{N}^*$, est de classe $\mathrm{C}^{m-1}(\mathbb{R})$, et, pour n'importe quel $\tilde{k} \in \mathbb{R}$, $f \mapsto \frac{\mathrm{d}^p \tilde{f}_n}{\mathrm{d}k^p}(\tilde{k})$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}^s$ pour $p = 0, 1, \ldots, m-1$.

$K \cap \mathbb{C}^{\pm}$. Maintenant, comme $\mathbb{Z}_\tau^2 = \cup_{n \in \mathbb{N}_\tau} \mathcal{J}_n^\tau$ est fini en vertu de (63)-(64), il suffit donc de prendre

$$f \in \mathcal{NH}_m^s(\tau) = \bigcap_{(n,j) \in \mathbb{Z}_\tau^2} \mathcal{NH}_{n,j,m_{n,j}}^s, \text{ où } m = (m_{n,j})_{(n,j) \in \mathbb{Z}_\tau^2},$$

avec $m_{n,j} \in \mathbb{N}_{N_{n,j}-1}^*$ pour tout $(n,j) \in \mathbb{Z}_\tau^2$ et $s > |m| - 1/2$ où $|m| = \max_{(n,j) \in \mathbb{Z}_\tau^2} m_{n,j}$, puis $g \in \mathcal{NH}_{m'}^{s'}(\tau)$ avec $m' = (N_{n,j} - m_{n,j})_{(n,j) \in \mathbb{Z}_\tau^2}$ et $s' > |m'| - 1/2$ vérifiant $s + s' > |N|$ où $N = (N_{n,j})_{(n,j) \in \mathbb{Z}_\tau^2}$. Compte tenu de ce qui précède, les espaces $\mathcal{NH}_m^s(\tau)$ et $\mathcal{NH}_{m'}^{s'}(\tau)$ sont bien des epaces de Banach pour la topologie usuelle de $\mathrm{L}^{2,s}(\Omega; \epsilon(x_t)\mathrm{d}x)^3$. Ils fournissent ainsi un cadre adapté à l'écriture d'un PAL aux seuils :

Théorème 21. *([88, Théorème 3.2]) Soient $\tau \in \mathcal{Z}$ et K un sous-ensemble compact de $\mathbb{C} \setminus \mathcal{Z} \cup \{\tau\}$. On note $N_{n,j}$ l'ordre de*[41] *multiplicité de $k_{n,j}$, $(n,j) \in \mathbb{Z}_\tau^2$, en tant que zéro de la fonction $k \mapsto \lambda_n(k) - \tau$, et l'on pose $N = (N_{n,j})_{(n,j) \in \mathbb{Z}_\tau^2}$. Etant donnés $m = (m_{n,j})_{(n,j) \in \mathbb{Z}_\tau^2}$ tel que $m_{n,j} \in \mathbb{N}_{N_{n,j}-1}^*$ et $m' = N - m$, soient $(s, s') \in (|m| - 1/2, +\infty) \times (|m'| - 1/2, +\infty)$ vérifiant $s + s' > |N|$. Alors la fonction $z \mapsto R_M^{\pm}(z)$ se prolonge en une fonction $(\theta/|N|)$-höldérienne sur $K \cap \overline{\mathbb{C}^{\pm}}$, et ceci pour n'importe quel réel $\theta \in [0, (t + t' - 1)/2)$ avec $t = \min(1, s - |m| + 1/2)$ et $t' = \min(1, s' - |m'| + 1/2)$, en ce sens qu'il existe une constante $C = C(s, s', \theta, K) > 0$ pour laquelle*

$$\|R_M^{\pm}(z') - R_M^{\pm}(z)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{NH}_m^s(\tau), \mathcal{NH}_{m'}^{s'}(\tau))} \leq C|z' - z|^{\theta/|N|}, \ (z, z') \in (K \cap \overline{\mathbb{C}^{\pm}})^2.$$

De plus, pour tout $f \in \mathcal{NH}_m^s(\tau)$ et tout $g \in \mathcal{NH}_{m'}^{s'}(\tau)$ on a

$$\begin{aligned} &\lim_{z \to \tau, \ \pm \mathrm{Im}(z) > 0} \langle R_M^{\pm}(z) f, g \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\text{v.p.} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{h_n(k)}{\lambda_n(k) - z} \mathrm{d}k \right) \pm \imath\pi \sum_{k \in \lambda_n^{-1}(\{\tau\}), \ \lambda_n'(k) \neq 0} \frac{h_n(k)}{|\lambda_n'(k)|} \right), \end{aligned}$$

où $h_n(k) = \tilde{f}_n(k) \overline{\tilde{g}_n(k)}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}$.

3.2 Asymptotique spectrale dans un guide d'onde torsadé

Cette partie est consacrée à l'étude du spectre du Laplacien de Dirichlet dans un guide d'onde torsadé $\Omega_\theta = r_\theta \omega \times \mathbb{R}$ où $\omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine borné de frontière C^2, et $r_\theta = r_\theta(x_3)$ désigne la rotation axiale d'angle $\theta(x_3)$, dépendant uniquement de la variable longitudinale x_3. Il a été montré dans [40] que l'infimum du spectre[42] essentiel du Laplacien de Dirichlet augmente sous l'action d'une torsion constante. De plus, toute décroissance locale d'une torsion initialement constante crée au minimum un état propre. Le but poursuivi dans [17] était justement de caractériser plus précisément les états propres du Laplacien de Dirichlet qui sont induits par la torsion du guide d'onde.
En fait, dans le cas de l'opérateur de Schrödinger, il est bien connu (voir [71, 82]) que l'ajout d'un potentiel V décroissant suffisamment lentement à l'infini crée une infinité d'états propres, dont la[43] distribution est déterminée par le comportement à l'infini de V. Un effet spectral strictement identique a été obtenu dans [17] par torsion du guide d'onde. Voici comment.

41. On rappelle que $N_{n,j} \geq 2$ par construction, pour tout $(n,j) \in \mathbb{Z}_\tau^2$.
42. De ce point de vue la torsion produit donc un effet similaire à celui d'un champ magnétique constant dans une bande bidimensionnelle infinie (voir [51, 18]).
43. Comprise comme le nombre de valeurs propres s'accumulant en dessous de l'infimum du spectre essentiel.

3.2.1 Le Laplacien de Dirichlet dans un guide d'onde torsadé périodique

On suppose désormais que ω contient l'origine de $\mathbb{R}^2$ et que $\theta \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ est de dérivée bornée sur $\mathbb{R}$.

Définitions. On note $(-\Delta^D)$ le [44]Laplacien de Dirichlet dans $\mathrm{L}^2(\Omega_\theta)$. La transformation

$$(\mathcal{U}f)(\mathbf{x}) = f\left(r_\theta(\mathbf{x})\right),\ \mathbf{x} \in \Omega,\ f \in \mathrm{L}^2(\Omega_\theta),$$

est unitaire de $\mathrm{L}^2(\Omega_\theta)$ dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, et vérifie de plus $\mathcal{U}(\mathrm{H}_0^1(\Omega_\theta)) = \mathrm{H}_0^1(\Omega)$. L'opérateur $H_{\dot\theta} = \mathcal{U}(-\Delta^D)\mathcal{U}^{-1}$ est autoadjoint dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$, et agit sur son domaine comme

$$H_{\dot\theta} = -\Delta_t - (\dot\theta(x_3)\partial_\varphi + \partial_3)^2, \tag{72}$$

où $\Delta_t = \partial_1^2 + \partial_2^2$, $\partial_\varphi = x_1\partial_2 - x_2\partial_1$ et $\dot\theta$ désigne la dérivée de θ. Comme ω est borné et que l'on a imposé des conditions au bord de Dirichlet, l'opérateur $H_{\dot\theta}$ est strictement positif, et donc inversible dans $\mathcal{B}(\mathrm{L}^2(\Omega))$.

Guide d'onde torsadé périodique. Par cette expression on désigne Ω_θ associé à une torsion constante : il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\dot\theta(x_3) = \beta$ pour tout $x_3 \in \mathbb{R}$. Le système étant invariant par translation dans la direction x_3, l'operateur $\hat H_\beta = \mathcal{F}_{x_3} H_\beta \mathcal{F}_{x_3}^*$, où $\mathcal{F}_{x_3}$ désigne la transformation de Fourier partielle par rapport à x_3, admet une décomposition en intégrale directe $\hat H_\beta = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} h_\beta(k) \mathrm{d}k$, où

$$h_\beta(k) = -\Delta_t - (\beta\partial_\varphi + \imath k)^2,\ \mathrm{Dom}(h_\beta(k)) = \mathrm{H}^2(\omega) \cap \mathrm{H}_0^1(\omega),\ k \in \mathbb{R}.$$

L'injection $\mathrm{H}_0^1(\omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^2(\omega)$ étant compacte, le spectre de $h_\beta(k)$ est discret. On note $\{E_j(k),\ j \in \mathbb{N}^*\} = \{E_j(k,\beta),\ j \in \mathbb{N}^*\}$ la suite croissante des valeurs propres de $h_\beta(k)$, $k \in \mathbb{R}$. Comme $E_j(k) = k^2(1 + o(1))$ lorsque $k \to \pm\infty$, d'après le principe du min-max, le spectre de H_β est donc absolument continu, avec

$$\sigma(H_\beta) = \sigma_{\mathrm{ac}}(H_\beta) = \cup_{j\in\mathbb{N}} E_j(\mathbb{R}) = [\mathcal{E}, +\infty),\ \text{où } \mathcal{E} = \mathcal{E}(\beta) = \min_{k\in\mathbb{R}} E_1(k,\beta).$$

Comme $h_\beta(k)$ est une famille analytique au sens de Kato, les fonctions $\mathbb{R} \ni k \mapsto E_j(k) \in \mathbb{R}_+^*$, $j \in \mathbb{N}^*$, sont continues et analytiques par morceaux. Pour chaque $k \in \mathbb{R}$ soit $\{\psi_j(\cdot;k),\ j \in \mathbb{N}^*\}$ une base orthonormale de $\mathrm{L}^2(\omega)$ formée de fonctions propres de l'opérateur $h_\beta(k)$:

$$(h_\beta(k)\psi_j)(x_t;k) = E_j(k,\beta)\psi_j(x_t;k),\ x_t = (x_1,x_2) \in \omega.$$

On a de plus $\psi_j(.;k) \in \mathrm{C}^\infty(\omega)$, $j \in \mathbb{N}^*$, puisque $h_\beta(k)$ est fortement elliptique à coefficients $\mathrm{C}^\infty(\omega)$.
Ensuite, $h_\beta(0)$ étant à coefficients réels, $E_1(0)$ est valeur propre simple de $h_\beta(0)$, et $\psi_1(\cdot;k)$ peut donc être choisie réelle et strictement positive sur ω. De plus, il existe $\delta > 0$ pour lequel $E_1(k)$ est simple sur $[-\delta,\delta]$, de sorte que $[-\delta,\delta] \ni k \mapsto E_1(k) \in (0,+\infty)$ est analytique. De façon similaire $\psi_1(\cdot;k)$ peut être choisie de sorte que $[-\delta,\delta] \ni k \mapsto \psi_1(\cdot;k) \in \mathrm{H}^2(\omega) \cap \mathrm{H}_0^1(\omega)$ soit analytique.

Existence de la masse effective à l'origine. La première fonction de bande, $E_1(k)$, $k \in \mathbb{R}$, atteint son minimum $\mathcal{E}$ en $k = 0$ et seulement en ce point, et ce minimum est [45]non

44. C'est-à-dire l'opérateur autoadjoint dans $\mathrm{L}^2(\Omega_\theta)$ associé à la forme quadratique fermée $q_\theta[f] = \int_{\Omega_\theta} |\nabla f(\mathbf{x})|^2 \mathrm{d}\mathbf{x}$ de domaine $\mathrm{H}_0^1(\Omega_\theta)$.
45. Ce qui se traduit, en empruntant la terminologie utilisée en physique du solide (voir par exemple [64]), en disant qu'il existe *une masse effective* à l'origine.

dégénéré, en ce sens que $E_1''(0) > 0$. Posant $\epsilon_\omega(\beta) = \frac{\beta^2 C_\omega}{1+\beta^2 C_\omega}$ où $C_\omega = \sup_{x_t \in \omega}(x_1^2 + x_2^2)$, on a en effet

$$E_1(0,\beta) + (1 - \epsilon_\omega(\beta))k^2 \leq E_1(k,\beta) \leq E_1(0,\beta) + k^2,\ k \in \mathbb{R},$$

grâce au principe du min-max. Du fait de l'analyticité de $k \mapsto E_1(k,\beta)$ à l'origine, ceci entraîne la :

Proposition 22. *([17, Corollaire 3.3]) Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$ on a $\partial_k E_1(0,\beta) = 0$ et*

$$\mu = \mu(\beta) = \frac{1}{2}\partial_k^2 E_1(0,\beta) > 0,$$

i.e. il existe une masse effective à l'origine. Par suite

$$E_1(k,\beta) = E_1(0,\beta) + \mu(\beta)k^2 + O(k^3),\ k \to 0.$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{R}^*$ et $\beta \in \mathbb{R}$, on a $E_1(k,\beta) > E_1(0,\beta)$.

3.2.2 Asymptotique spectrale

Perturbation de la torsion. Le paramètre $\beta > 0$ étant toujours fixé, on considère une perturbation de la dérivée de la torsion, i.e.

$$\dot{\theta}(x_3) = \beta - \varepsilon(x_3),$$

où $\varepsilon \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R})$ satisfait $\varepsilon(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, et $\lim_{x \to \pm\infty} \varepsilon(x) = 0$. D'après (72), on a alors

$$H_{\beta-\varepsilon} = H_\beta + W_{\varepsilon,\beta},\ W_{\varepsilon,\beta} = 2\beta\varepsilon\partial_\varphi^2 + \partial_\varphi\varepsilon\partial_3 + \partial_3\varepsilon\partial_\varphi - \varepsilon^2\partial_\varphi^2. \tag{73}$$

Comme $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$, la différence $H_{\beta-\varepsilon}^{-1} - H_\beta^{-1}$ est compacte, de sorte que

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\beta-\varepsilon}) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H_\beta) = [\mathcal{E}, +\infty).$$

Distribution asymptotique des valeurs propres de $H_{\beta-\varepsilon}$. Si ω n'est pas un disque alors toute décroissance locale de la torsion crée au moins une valeur propre inférieure à $\mathcal{E}$ selon [40]. Ainsi, si ε est à support compact alors $H_{\beta-\varepsilon}$ possède au moins une valeur propre. En fait, on va voir que c'est une infinité de valeurs propres qui s'accumulent en dessous de $\mathcal{E}$ lorsque la perturbation ε décroît suffisamment lentement à l'infini. De plus, dans ce cas, l'asymptotique lorsque $t \uparrow \mathcal{E}$, du nombre $N(H_{\beta-\varepsilon}; t)$ de valeurs propres de $H_{\beta-\varepsilon}$ appartenant à l'intervalle $(-\infty, t)$, $t \in (-\infty, \mathcal{E})$, comptées avec leur multiplicité, peut être explicitement décrit.
Auparavant il est nécessaire d'imposer l'une des deux hypothèses supplémentaires suivantes à ε :

Hypothèse 23. *On suppose que $\varepsilon \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ et qu'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $C > 0$ telles que :*

$$0 \leq \varepsilon(x) \leq C(1+|x|)^{-\alpha} \text{ et } |\dot{\varepsilon}(x)| \leq C(1+|x|)^{-\alpha-1},\ x \in \mathbb{R}.$$

Hypothèse 24. *En plus des conditions requises par l'Hypothèse 23, on suppose qu'il existe une constante $L > 0$ vérifiant :*

$$\lim_{|x| \to \infty} |x|^\alpha \varepsilon(x) = L.$$

Le résultat principal de [17] s'énonce commse suit :

Théorème 25. *([17, Théorème 4.4])*

(i) Si l'Hypothèse 23 est satisfaite pour $\alpha \in (0,2)$ alors

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}} N(H_{\beta-\varepsilon}; \mathcal{E}-\lambda) = \frac{2}{\pi\alpha\sqrt{\mu}} \left(2\beta\, L \,\|\partial_\varphi \psi_1(\cdot,0)\|^2_{\mathrm{L}^2(\omega)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}\right), \tag{74}$$

μ étant la constante définie dans la Proposition 22 et B désignant la fonction béta d'Euler.

(ii) Si l'Hypothèse 24 est vraie pour $\alpha = 2$ alors

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} |\ln \lambda|^{-1} N(H_{\beta-\varepsilon}; \mathcal{E}-\lambda) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2\beta L}{\mu} \|\partial_\varphi \psi_1(\cdot,0)\|^2_{\mathrm{L}^2(\omega)} - \frac{1}{4}\right)_+^{1/2},$$

où $x_+ = \max(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$. Si de plus $2\beta L \|\partial_\varphi \psi_1(\cdot,0)\|^2_{\mathrm{L}^2(\omega)} < \frac{\mu}{4}$, alors

$$N(H_{\beta-\varepsilon}; \mathcal{E}-\lambda) = O(1), \ \lambda \downarrow 0. \tag{75}$$

(iii) Enfin, dans le cas où l'Hypothèse 23 est satisfaite avec $\alpha > 2$ alors on a (75).

Comme dans le cas d'un potentiel externe, la vitesse de divergence de $N(H_{\beta-\varepsilon}; \mathcal{E}-\lambda)$ lorsque $\lambda \downarrow 0$ est déterminée par le taux de décroissance α de la perturbation. De plus, les coefficients des asymptotiques (74) et (75) dépendent ici de L et β, mais aussi de la géométrie de la section transverse ω, à travers le préfacteur $\|\partial_\varphi \psi_1(\cdot,0)\|_{\mathrm{L}^2(\omega)}$. Si $\|\partial_\varphi \psi_1(\cdot,0)\|_{\mathrm{L}^2(\omega)} = 0$ alors le membre de droite de l'égalité (74) s'annule. Or, d'après [17, Proposition 2.2], l'égalité $\|\partial_\varphi \psi_1(\cdot,0)\|_{\mathrm{L}^2(\omega)} = 0$ traduit le fait que ω est un disque centré à l'origine. Dans ce cas on a en effet $\Omega_\theta = \Omega$ pour n'importe quelle torsion θ, et l'opérateur $H_{\dot\theta}$ est donc unitairement équivalent à H_0. Le spectre de H_0 étant absolument continu en vertu de la section 3.2.1, cela entraîne bien $N(H_{\beta-\varepsilon}; \mathcal{E}-\lambda) = 0$ pour tout $\lambda > 0$.

Principales idées de la démonstration du Théorème 25. La preuve de ce résultat repose essentiellement sur le fait que l'asymptotique des valeurs propres de $H_{\beta-\varepsilon}$ est donnée par celle de l'opérateur de Schrödinger unidimensionnel $H_{\mathrm{eff}} = -\mu \frac{d^2}{dx^2} - V_{\mathrm{eff}}$, avec $V_{\mathrm{eff}}(x) = 2\beta \|\partial_\varphi \psi_1(\cdot;0)\|^2_{\mathrm{L}^2(\omega)} \varepsilon(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Le Théorème 25 se déduit ensuite immédiatement des résultats standards décrivant l'asymptotique des valeurs propres des opérateurs de Schrödinger 1D perturbés par un potentiel décroissant et attractif (voir [82, Théorème XIII.82 et Problème XIII.22] ainsi que [65]).

La stratégie permettant de ramener l'étude des valeurs propres de $H_{\beta-\varepsilon}$ à celle du spectre discret de H_{eff} consiste à projeter $H_{\beta-\varepsilon}$ sur un voisinage du minimum de son spectre essentiel. Plus précisément, en considérant la projection orthogonale dans $\mathrm{L}^2(\Omega)$,

$$P_\delta = \mathcal{F}_{x_3}^* \mathcal{P}_\delta \mathcal{F}_{x_3}, \ \mathcal{P}_\delta = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} \chi_\delta(k) \pi(k) \mathrm{d}k,$$

où $\chi_\delta : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ désigne la fonction caractéristique de l'intervalle $(-\delta,\delta)$ et $\pi(k)$, $k \in [-\delta,\delta]$, est la projection orthogonale $\langle \psi_1(\cdot;k), \cdot \rangle_{\mathrm{L}^2(\omega)} \psi_1(\cdot;k)$ agissant dans $\mathrm{L}^2(\omega)$, puis en posant $Q_\delta = I - P_\delta$, il résulte du théorème de stabilité de Weyl que

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(Q_\delta H_{\beta-\varepsilon} Q_\delta) = \sigma_{\mathrm{ess}}(Q_\delta H_\beta Q_\delta) = [\mathcal{E}', +\infty),$$

avec $\mathcal{E}' = \min(\inf_{|k| \geq \delta} E_1(k), \inf_{k \in \mathbb{R}} E_2(k)) > \mathcal{E}$. Ainsi $N(Q_\delta H_{\beta-\varepsilon} Q_\delta; \mathcal{E}-\lambda) = O(1)$ lorsque $\lambda \downarrow 0$. Eu égard à (73), ce[46]type d'arguments permet de justifier que l'asymptotique de $H_{\beta-\varepsilon}$ est déterminée par celle de l'opérateur réduit $\mathbb{H}_\delta = P_\delta(H_\beta + 2\beta\varepsilon\partial_\varphi^2) P_\delta$

46. Les estimations correspondantes utilisent essentiellement le principe de Birman-Schwinger et les inégalités de Weyl (voir [14, Section 1, Equation (1.31)]).

agissant dans $P_\delta \mathrm{L}^2(\Omega)$. L'estimation de ce terme se réduit ensuite à un problème monodimensionel grâce à l'opérateur unitaire $U_\delta : \mathrm{L}^2(-\delta,\delta) \to P_\delta \mathrm{L}^2(\Omega)$, défini par

$$U_\delta f = \mathcal{F}_{x_3}^* \tilde{f},\ \tilde{f}(x_t,k) = \chi_\delta(k) f(k) \psi_1(x_t,k),\ f \in \mathrm{L}^2(-\delta,\delta),\ x_t \in \omega.$$

On a en effet $U_\delta^* \mathbb{H}_\delta U_\delta = M - 2\beta\Gamma^*\Gamma$ où M désigne l'opérateur de multiplication par $E_1(k)$ dans $\mathrm{L}^2(-\delta,\delta)$ et $\Gamma : \mathrm{L}^2(-\delta,\delta) \to \mathrm{L}^2(\Omega)$ est l'opérateur intégral de noyau $\gamma(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-1/2} \mathrm{e}^{ix_3 k} \varepsilon(x_3)^{1/2} \partial_\varphi \psi_1(x_t;k)$, $\mathbf{x} = (x_t, x_3) \in \Omega$, $k \in (-\delta,\delta)$. Le principe de Birman-Schwinger ramène enfin le calcul de l'asymptotique du spectre discret de $M - 2\beta\Gamma^*\Gamma$ à celle de H_{eff}.

3.3 Etats quantiques guidés d'un Hamiltonien bipériodique 3D

3.3.1 Sur la propagation des ondes dans les milieux périodiques

Etat de l'art. Il existe assez peu de publications mathématiques décrivant les phénomènes de propagation ondulatoire dans des milieux périodiques. La plus célèbre d'entre-elles est probablement la monographie [96], qui traite à la fois des ondes acoustiques et électromagnétiques, alors que [46, 47, 48, 49, 53] considèrent l'équation de Schrödinger, et que c'est l'opérateur de Maxwell qui est étudié dans [50]. Dans tous les cas les auteurs mettent à profit la périodicité du système étudié pour décomposer l'opérateur différentiel correpondant H en une intégrale directe $\int_{\mathcal{B}} H(\mathbf{k}_\ell) \mathrm{d}\mathbf{k}_\ell$, où $\mathcal{B}$ désigne la zone de Brillouin et $\mathbf{k}_\ell$ est le quasi-moment associé à la tranformation de Bloch-Floquet-Gelfand. Dans tous les articles cités ci-dessus, un principe d'absorption limite (noté PAL en abrégé dans la suite, comme dans la section 3.1) pour H, voire $H(\mathbf{k}_\ell)$, $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}$, est établi afin de mettre ensuite en évidence les propriétés d'absolue continuité du spectre. Des hypothèses adaptées faites sur le potentiel périodique V décrivant les caractéristiques physiques du modèle garantissent alors que l'opérateur $\Gamma(\mathbf{k}_\ell, E \pm \imath\varepsilon) = V(H(\mathbf{k}_\ell) - E \mp \imath\varepsilon)^{-1}$ est compact pour chaque $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}$ et $\varepsilon > 0$. L'étape suivante consiste à relier le PAL à l'existence de $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathcal{B}} \frac{f(E \pm \imath\varepsilon, \mathbf{k}_\ell)}{h(E \pm \imath\varepsilon, \mathbf{k}_\ell)} \mathrm{d}\mathbf{k}_\ell$ pour des fonctions f convenables, $h(E \pm \imath\varepsilon, \mathbf{k}_\ell)$ désignant ici le déterminant de Fredholm de $\Gamma(\mathbf{k}_\ell, E \pm \imath\varepsilon)$. Ceci indique que l'obtention d'un PAL pour ces modèles est intrinsèquement liée à la caractérisation de la [47] "variété de Fermi" $\mathcal{C}(E) = \{\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B},\ h(\mathbf{k}_\ell, E) = 0\}$, ce qui constitue généralement un problème difficile. L'alternative à l'étude de la structure de $\mathcal{C}(E)$ en vue de l'établissement d'un PAL, est de supposer la décroissance exponentielle de V dans la direction transversale (c'est-à-dire non périodique), comme cela est fait dans [48, 49, 50, 53]. Dans ce cadre la résolvante peut d'ailleurs être prolongée en une fonction méromorphe dans les demi-plans complexes inférieur ou supérieur.

Etats guidés et "variété de Fermi". Une approche radicalement différente de la précédente est mise en œuvre dans [12]. Elle s'appuie sur la caractérisation effective de $\mathcal{C}(E)$ en une variété analytique réelle, qui est donc paramétrisable. Cette propriété suffit en à établir, par un calcul direct (procédant par changement de variables approprié dans les intégrales mentionnées ci-dessus lorsque $\mathbf{k}_\ell$ appartient à un voisinage de $\mathcal{C}(E)$), un PAL pour les potentiels V décroissant polynomialement vite dans la direction transverse. Néanmoins, le bénéfice principal que [12] retire de la caractérisation de la structure sous-jacente de $\mathcal{C}(E)$, c'est une meilleure connaissance des [48] états guidés du système, définis comme les fonctions propres de $H(\mathbf{k}_\ell)$ associées à l'énergie E, pour n'importe quel $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}$.

47. Selon la terminologie utilisée dans [68].

48. La terminologie employée dans les littératures mathématique et physique pour classifier les ondes dépend en fait assez fortement des auteurs et de la communauté scientifique à laquelle ils appartiennent. Ainsi c'est le terme "onde de surface" qui est employé dans [96], alors que celui d'"onde guidée" est utilisé dans [97], et que [1] fait référence, selon le contexte étudié, à la fois aux "ondes de surface" et aux "ondes guidées".

En fait, il y est montré que les états guidés sont caractérisés par des quasi-moments satisfaisant l'une des deux conditions suivantes : $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{C}(E)$ ou $|\mathbf{k}_\ell| = E^{1/2}$. La terminologie utilisée ici est justifiée par le fait que ces fonctions propres décroissent dans la direction transverse. Ceci est vrai aussi bien pour $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{C}(E)$ que pour $|\mathbf{k}_\ell| = E^{1/2}$, bien que l'existence d'états guidés ne soit garantie que pour $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{C}(E)$ dans le cadre général examiné dans [12]. Par contre, l'absence d'état guidé associé à $|\mathbf{k}_\ell| = E^{1/2}$ peut être prouvée pour une classe plus restricive (mais néanmoins assez vaste et par ailleurs explicitement décrite) de potentiels périodiques V. Dans ce cas particulier, les états guidés de l'opérateur Hamiltonien correpondant sont donc canoniquement associés aux quasi-moments $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{C}(E)$.

3.3.2 Présentation du problème et réduction du système

Le réseau. On se donne un réseau $\mathcal{L} = \sum_{j=2,3} \mathbb{Z}\mathbf{a}_j$ engendré par $\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ (supposés orthogonaux pour le produit scalaire euclidien de $\mathbb{R}^2$ afin de simplifier l'exposé), dont la *zone de Seitz* est notée $\mathcal{S} = \mathbb{R}^2/\mathcal{L} = \left\{ \mathbf{x}_\ell \in \mathbb{R}^2,\ \mathbf{x}_\ell = \sum_{j=2,3} s_j \mathbf{a}_j,\ -1/2 < s_j \leq 1/2 \right\}$. On définit sa *zone de Brillouin* à partir de la base duale $\{\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$, où $\mathbf{b}_j = 2\pi \frac{\mathbf{a}_j}{|\mathbf{a}_j|^2}$, $j = 2, 3$, par $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{k}_\ell \in \mathbb{R}^2,\ \mathbf{k}_\ell = \sum_{j=2,3} t_j \mathbf{b}_j,\ -1/2 < t_j \leq 1/2 \right\}$, de sorte que $\mathcal{B} = \mathbb{R}^2/\mathcal{L}^\perp$, où $\mathcal{L}^\perp = \sum_{j=2,3} \mathbb{Z}\mathbf{b}_j$ désigne le réseau réciproque.

Hamiltonien périodique. Etant donnée une fonction $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfaisant

$$V(x_1, \mathbf{x}_\ell + \mathbf{a}_j) = V(x_1, \mathbf{x}_\ell),\ x_1 \in \mathbb{R},\ \mathbf{x}_\ell = (x_2, x_3) \in \mathbb{R}^2,\ j = 2, 3,$$

on s'intéresse aux propriétés spectrales de la réalisation autoadjointe de l'opérateur $-\Delta + V$, agissant dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Pour cela, on considère pour chaque $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}$ l'opérateur $H_0(\mathbf{k}_\ell) = -\Delta$ dans $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\mathbb{R} \times \mathcal{S})$, muni des conditions aux [49]limites périodiques,

$$\varphi(x_1, \mathbf{x}_\ell + \mathbf{a}_j) = \mathrm{e}^{\imath \langle \mathbf{k}_\ell, \mathbf{a}_j \rangle} \varphi(x_1, \mathbf{x}_\ell),\ \partial_j \varphi(x_1, \mathbf{x}_\ell + \mathbf{a}_j) = \mathrm{e}^{\imath \langle \mathbf{k}_\ell, \mathbf{a}_j \rangle} \partial_j \varphi(x_1, \mathbf{x}_\ell),\ j = 2, 3, \quad (76)$$

imposées à tout $x_1 \in \mathbb{R}$ et tout $\mathbf{x}_\ell \in \partial\mathcal{S}$ tel que $\mathbf{x}_\ell + \mathbf{a}_j \in \partial\mathcal{S}$, de domaine

$$\mathrm{dom}\ H_0(\mathbf{k}_\ell) = \{\varphi \in \mathrm{H}^2(\mathbb{R} \times \mathcal{S}) \text{ vérifiant } (76)\}.$$

Evidemment, $-\Delta + V$ est relié à la famille $\{H_0(\mathbf{k}_\ell),\ \mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}\}$ via l'identité

$$\mathcal{U}(-\Delta + V)\mathcal{U}^{-1} = \int_{\mathcal{B}}^{\oplus} H(\mathbf{k}_\ell) \mathrm{d}\mathbf{k}_\ell,\ \text{où } H(\mathbf{k}_\ell) = H_0(\mathbf{k}_\ell) + V,$$

dans laquelle $\mathcal{U}$ désigne la [50]transformation de Bloch-Floquet-Gelfand.

Décomposition spectrale. Posant $\varphi(\mathbf{k}_\ell + \mathbf{K}_\ell; \mathbf{x}_\ell) = |\mathcal{S}|^{-1/2} \mathrm{e}^{\imath \langle \mathbf{k}_\ell + \mathbf{K}_\ell, \mathbf{x}_\ell \rangle}$ pour tout $\mathbf{x}_\ell \in \mathcal{S}$, $(\xi, \mathbf{k}_\ell) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B}$ et $\mathbf{K}_\ell \in \mathcal{L}^\perp$, on définit le coefficient de Fourier généralisé de $u \in \mathcal{H}$ par

$$\widetilde{u}(\xi, \mathbf{k}_\ell + \mathbf{K}_\ell) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \lim_{X \to +\infty} \int_{-X}^{X} \mathrm{e}^{-\imath \xi x_1} \langle u(x_1, \cdot), \varphi(\mathbf{k}_\ell + \mathbf{K}_\ell) \rangle_{\mathrm{L}^2(\mathcal{S})} \mathrm{d}x_1.$$

L'ensemble $\{(2\pi)^{-1/2} \mathrm{e}^{\imath \xi x_1} \varphi(\xi, \mathbf{k}_\ell + \mathbf{K}_\ell),\ \mathbf{K}_\ell \in \mathcal{L}^\perp,\ \xi \in \mathbb{R}\}$ est en fait un système complet de fonctions propres généralisées de $H_0(\mathbf{k}_\ell)$, en ce sens que :

49. La notation ∂_j désigne ici la dérivée par rapport à la coordonnée s_j définie par $\mathbf{x}_\ell = \sum_{j=2,3} s_j \mathbf{a}_j$.

50. Ici, $\mathcal{U} : \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3) \to \int_{\mathcal{B}}^{\oplus} \mathcal{H} \mathrm{d}\mathbf{k}_\ell$ est définie pour tout $\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ par

$$(\mathcal{U}\varphi)(\mathbf{k}_\ell, x_1, \mathbf{x}_\ell) = |\mathcal{B}|^{-1/2} \sum_{\mathbf{R}_\ell \in \mathcal{L}} \mathrm{e}^{-\imath \langle \mathbf{k}_\ell, \mathbf{R}_\ell \rangle} \varphi(x_1, \mathbf{x}_\ell + \mathbf{R}_\ell),$$

puis étendue en une transformation unitaire sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^3)$.

(a) $u \mapsto (\widetilde{u}(\cdot, \mathbf{k}_\ell + \mathbf{K}_\ell))_{\mathbf{K}_\ell \in \mathcal{L}^\perp}$ est une transformation unitaire de $\mathcal{H}$ sur $\bigoplus_{\mathbf{K}_\ell \in \mathcal{L}^\perp} \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$;

(b) $f(\widetilde{H_0(\mathbf{k}_\ell)})u(\xi, \mathbf{k}_\ell + \mathbf{K}_\ell) = f(\xi^2 + |\mathbf{k}_\ell + \mathbf{K}_\ell|^2)\widetilde{u}(\xi, \mathbf{k}_\ell + \mathbf{K}_\ell)$ pour tout $(\xi, \mathbf{k}_\ell) \in \mathbb{R} \times \mathcal{B}$, $\mathbf{K}_\ell \in \mathcal{L}^\perp$, et toute fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Par suite, on a $\sigma(H_0(\mathbf{k}_\ell) = \sigma_{\mathrm{ac}}(H_0(\mathbf{k}_\ell)) = [|\mathbf{k}_\ell|^2, +\infty)$ pour n'importe quel $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}$.

Etats guidés. Un *état guidé* pour l'énergie E [51] est une fonction $u \in \mathcal{H} \backslash \{0\}$ satisfaisant l'identité $H(\mathbf{k}_\ell)u = Eu$ pour un certain $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}$. Etant donnés $g \in [0, +\infty)$ et $W : \mathbb{R} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+$ vérifiant $\|W\|_{\mathcal{H}} = 1$, on suppose désormais que

$$V(\mathbf{x}) = -gW(\mathbf{x})^2, \ \mathbf{x} = (x_1, \mathbf{x}_\ell) \in \mathbb{R} \times \mathcal{S},$$

de sorte qu'en posant $R_g(\mathbf{k}_\ell, z) = (H(\mathbf{k}_\ell) - z)^{-1}$ pour tout $z \in \rho(H(\mathbf{k}_\ell))$, la première formule de la résolvante entraîne

$$R_g(\mathbf{k}_\ell, z) = R_0(\mathbf{k}_\ell, z) + gR_0(\mathbf{k}_\ell, z)W(1 - g\Gamma_{\mathbf{k}_\ell}(z))^{-1}WR_0(\mathbf{k}_\ell, z). \tag{77}$$

Ici, $\Gamma_{\mathbf{k}_\ell}(z) = WR_0(\mathbf{k}_\ell, z)W$ est l'opérateur intégral dans $\mathcal{H}$ dont le noyau est donné par [53],

$$\gamma_{\mathbf{k}_\ell}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, z) = \imath\beta W(\mathbf{x})W(\mathbf{y}) \sum_{\mathbf{K}_\ell \in \mathcal{L}^\perp} \frac{\mathrm{e}^{\imath p(\mathbf{k}_\ell + \mathbf{K}_\ell, z)|x_1 - y_1|}}{p(\mathbf{k}_\ell + \mathbf{K}_\ell, z)} \mathrm{e}^{\imath \langle \mathbf{K}_\ell + \mathbf{k}_\ell, \mathbf{x}_\ell - \mathbf{y}_\ell \rangle}, \tag{78}$$

où $\beta = |\mathcal{B}|/(16\pi^2)$ et [52] $p(\mathbf{k}_\ell + \mathbf{K}_\ell, z) = \sqrt{z - |\mathbf{k}_\ell + \mathbf{K}_\ell|^2}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (resp. $| \cdot |$) désignant le produit scalaire euclidien (resp. la norme euclidienne) dans $\mathbb{R}^2$. Eu égard à (77), la question de l'existence d'états guidés dans ce système est donc liée à celle de l'inversibilité dans $B(\mathrm{L}^2(\mathbb{R} \times \mathcal{S}))$ de la famille d'opérateurs $\{1 - g\Gamma_{\mathbf{k}_\ell}(E), \ \mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}\}$.

3.3.3 Conditions d'existence de la résolvante réduite perturbée

Energie. Pour simplifier l'exposé, on ne considère dans la suite que des énergies $E \in (0, E_\delta)$, $\delta \geq 0$, où

$$E_\delta = \frac{\pi^2}{1 + \delta} \min_{j=2,3} |\mathbf{a}_j|^{-2} = \frac{1}{4(1 + \delta)} \min_{j=2,3} |\mathbf{b}_j|^2.$$

Cette restriction est purement technique et ne limite en rien la généralité de cette étude. En effet, elle garantit simplement pour tout $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}$ que $p_I(\mathbf{k}_\ell + \mathbf{K}_\ell, E) > 0$ pour n'importe quel $\mathbf{K}_\ell \in \mathcal{L}^\perp \backslash \{0\}$. La situation est en fait similaire dans le cas où $E \geq E_\delta$ en ce sens qu'il n'existe alors qu'un ensemble fini de valeurs “singulières” de $\mathbf{K}_\ell \in \mathcal{L}^\perp$ pour lesquelles $p_I(\mathbf{k}_\ell + \mathbf{K}_\ell, E) \leq 0$.

Propriétés spectrales de $\Gamma_{\mathbf{k}_\ell}(E + \imath\varepsilon)$. Comme $\Gamma_{\mathbf{k}_\ell}(E + \imath\varepsilon)$ est compact pour tout $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}_E = \mathcal{B}_E^- \cup \mathcal{B}_E^+$, où $\mathcal{B}_E^\pm = \{\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}, \ \pm(|\mathbf{k}_\ell|^2 - E) > 0\}$, son spectre est constitué d'une famille dénombrable de valeurs propres de multiplicité finie, exception faite éventuellement de 0, notées $\lambda_1(\mathbf{k}_\ell, E + \imath\varepsilon), \lambda_2(\mathbf{k}_\ell, E + \imath\varepsilon), \ldots$, et ordonnées ici par ordre décroissant de magnitude :

$$|\lambda_1(\mathbf{k}_\ell, E + \imath\varepsilon)| \geq |\lambda_2(\mathbf{k}_\ell, E + \imath\varepsilon)| \geq \ldots$$

Par ailleurs, posant $\Lambda_{\mathbf{k}_\ell}(E + \imath\varepsilon) = \imath\beta/p(\mathbf{k}_\ell, E + \imath\varepsilon)$, il découle directement de (78) que $\Gamma_{\mathbf{k}_\ell}(E + \imath\varepsilon) = \Lambda_{\mathbf{k}_\ell}(E + \imath\varepsilon)P_{\mathbf{k}_\ell} + C_{\mathbf{k}_\ell}(E + \imath\varepsilon)$, où $P_{\mathbf{k}_\ell} = \langle \cdot, \varphi_{\mathbf{k}_\ell} \rangle_{\mathcal{H}} \varphi_{\mathbf{k}_\ell}$, $\varphi_{\mathbf{k}_\ell}(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x})\mathrm{e}^{\imath \langle \mathbf{k}_\ell, \mathbf{x}_\ell \rangle}$, et $C_{\mathbf{k}_\ell}(E + \imath\varepsilon)$ est un opérateur intégral de type Hilbert-Schmidt vérifiant

$$\|C_{\mathbf{k}_\ell}(E + \imath\varepsilon)\|_{HS} \leq c, \ (\mathbf{k}_\ell, \varepsilon) \in \mathcal{B}_E \times \mathbb{R}, \tag{79}$$

51. Selon la définition usuelle tirée de [97].

52. La partie imaginaire $p_I(\mathbf{k}_\ell + \mathbf{K}_\ell, z)$ de la racine carrée de $z - |\mathbf{k}_\ell + \mathbf{K}_\ell|^2$ est choisie supérieure ou égale à zero.

pour une constante $c > 0$ ne dépendant que de δ et W.

Si W décroît suffisamment vite par rapport à x_1 en ce sens que

$$W(x_1, \mathbf{x}_\ell) = O\left(\frac{1}{(1+|x_1|)^{(3+\epsilon)/2}}\right),\ \epsilon > 0, \tag{80}$$

alors (79) permet de montrer, en utilisant le fait que $\Lambda_{\mathbf{k}_\ell}(E + \imath\varepsilon)P_{\mathbf{k}_\ell}$ est un opérateur normal, que $1 - g\Gamma_{\mathbf{k}_\ell}(E + \imath\varepsilon)$ est inversible dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R} \times \mathcal{S})$. Et ceci dès que $\mathbf{k}_\ell$ est pris à l'extérieur de

$$\Omega_g(E) = \left\{\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}_E^+,\ p_I(\mathbf{k}_\ell, E) \in \left(\frac{s-1}{s}\beta, \frac{s-1}{s-2}\beta\right)\right\},\ s > s_0 = 3 + \sqrt{5}, \tag{81}$$

et que g et ε sont choisis suffisamment petits. Plus précisément :

Proposition 26. *([12, Proposition 2.1]) Etant donnés $\delta > 0$, $E \in (0, E_\delta)$, $g \in (0, s^{-1}c^{-1})$ pour $s > s_0$ fixé, et $W \in \mathrm{L}^\infty(\mathbb{R} \times \mathcal{S}) \setminus \{0\}$ satisfaisant* (80)*, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(g) > 0$ pour lequel chaque $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ vérifie :*

(a) Si $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}_E \backslash \Omega_g(E)$ alors $1 \in \rho(g\Gamma_{\mathbf{k}_\ell}(E + \imath\varepsilon))$ et $\|(1 - g\Gamma_{\mathbf{k}_\ell}(E + \imath\varepsilon))^{-1}\| \leq 2s(s-1)$;

(b) Si $\mathbf{k}_\ell \in \overline{\Omega}_g(E)$ alors :

(i) $\lambda_1(\mathbf{k}_\ell, E + \imath\varepsilon) \in \overline{B}(\Lambda_{\mathbf{k}_\ell}(E + \imath\varepsilon), c)$, et c'est une valeur propre simple ;

(ii) $\lambda_j(\mathbf{k}_\ell, E + \imath\varepsilon) \in \overline{B}(0, c)$ pour tout $j \geq 2$;

(iii) $\overline{B}(0, c) \cap \overline{B}(\Lambda_{\mathbf{k}_\ell}(E + \imath\varepsilon), c) = \emptyset$.

Comme $gc < 1$, il découle ensuite facilement de la Proposition 26 que

$$\mathcal{C}_g(E) = \{\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}_E,\ 1 - g\Gamma_{\mathbf{k}_\ell}(E) \text{ est singulière}\} = \{\mathbf{k}_\ell \in \Omega_g(E),\ g\lambda_1(\mathbf{k}_\ell, E) - 1 = 0\}, \tag{82}$$

ce qui justifie l'étude à venir de $\mathcal{C}_g(E)$.

Structure de $\{\mathbf{k}_\ell \in \Omega_g(E),\ g\lambda_1(\mathbf{k}_\ell, E) - 1 = 0\}$. La fonction $\mathbf{k}_\ell \mapsto \lambda_1(\mathbf{k}_\ell, E)$ étant analytique réelle dans $\Omega_g(E)$ en vertu de [12, Lemme 2.4], l'application a formule de Feynman-Hellmann permet de justifier (voir [12, Proposotion 3.1]) l'existence de deux constantes $g_0 = g_0(\delta, s, W) > 0$ et $\varkappa = \varkappa(\delta, s, W) > 0$, pour lesquelles on a

$$\sum_{j=2,3} \left|\frac{\partial \lambda_1}{\partial k_j}(\mathbf{k}_\ell, E)\right| \geq \varkappa > 0,\ \mathbf{k}_\ell \in \Omega_g(E),\ E \in (0, E_\delta),\ g \in (0, g_0).$$

Ceci, combiné à l'inégalité (voir [12, Proposition 2.1(c)])

$$|1 - g\lambda_1(\mathbf{k}_\ell, E)| > \frac{1}{s(s-1)},\ \mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}_E^+ \setminus \overline{\Omega_g(E)},$$

vérifiée sous les hypothèses de la Proposition 26, permet de décrire entièrement la structure de $\mathcal{C}_g(E)$:

Théorème 27. *([12, Théorème 1.1]) Si δ, E et W satisfont les conditions de la Proposition 26 alors il existe $g_0 = g_0(\delta, W) > 0$ assez petit tel que $\mathcal{C}_g(E)$ est une variété analytique réelle et compacte de dimension un pour chaque $g \in (0, g_0)$, qui est contenue dans la couronne $\Omega_g(E)$, définie par* (81)*. Plus précisément, $\mathcal{C}_g(E)$ est une courbe fermée et[53] simple qui n'est homotope à aucun point dans $\Omega_g(E)$.*

Le principal intérêt de ce résultat réside dans la caractérisation qui en découle, des états guidés apparaissant dans ce système.

53. C'est-à-dire sans point double.

3.3.4 Caractérisation des états guidés

Cas "général". Le résultat suivant précise le lien existant entre $\mathcal{C}_g(E)$ et les états guidés du système. Il décrit de plus leur taux de décroissance par rapport à x_1 en référant aux sous-espaces fermés de $\mathcal{H}$ suivants :

$$\mathcal{H}_\tau = \{v \in \mathcal{H},\ (1+x_1^2)^{\tau/2} v \in \mathcal{H}\},\ \tau \geq 0.$$

Théorème 28. *([12, Théorème 1.2]) Si E, g_0 et W sont comme dans le Théorème 27, alors, pour n'importe quel $g \in (0, g_0)$, tout état guidé d'énergie E appartient à $\cap_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_m$ et est forcément associé à un quasi-moment $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{C}_g(E) \cup (\mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_E)$. De plus, il est possible d'associer au moins un état guidé d'énergie E à tout $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{C}_g(E)$.*

L'idée de départ de la démonstration du Théorème 28 est qu'un état guidé u associé à $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}_E$ étant solution de l'équation $(H_0(\mathbf{k}_\ell) - (E \pm \imath\varepsilon))u = (gW^2 \mp \imath\varepsilon)u$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, il vérifie nécessairement

$$u = gR_0(\mathbf{k}_\ell, E \pm \imath\varepsilon)W^2 u \mp \imath\varepsilon R_0(\mathbf{k}_\ell, E \pm \imath\varepsilon)u,\ \varepsilon > 0. \tag{83}$$

Par conséquent $u = gR_0(\mathbf{k}_\ell, E \pm \imath 0)W^2 u$ par la [54][12, Proposition B.1], en faisant $\varepsilon \downarrow 0$ dans (83). Ceci entraîne $(1 - g\Gamma_{\mathbf{k}_\ell}(E))v = 0$, pour $v = Wu \neq 0$, et donc $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{C}_g(E) \cup (\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_E)$ en vertu de (82).

Ensuite, le spectre de $\Gamma_{\mathbf{k}_\ell}(E)$ état purement ponctuel d'après [12, Lemme 2.2], il existe donc forcément $v \in \mathcal{H}\setminus\{0\}$ satisfaisant $(1-g\Gamma_{\mathbf{k}_\ell}(E))v = 0$ pour chaque $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{C}_g(E)$. Ce qui entraîne $v = gWR_0(\mathbf{k}_\ell, E)Wv$ par [12, Proposition B.1] et montre que $R_0(\mathbf{k}_\ell, E)Wv \neq 0$. Comme on a de plus $(H(\mathbf{k}_\ell) - E)R_0(\mathbf{k}_\ell, E)Wv = 0$ par un calcul direct, $R_0(\mathbf{k}_\ell, E)Wv$ est donc bien un état guidé associé à $\mathbf{k}_\ell$. Par ailleurs, tout état guidé $u \in \mathcal{H}_\tau$, $\tau \geq 0$, associé à $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{C}_g(E)$ vérifiant $u = gR_0(\mathbf{k}_\ell, E)W^2 u$ avec $f = W^2 u \in \mathcal{H}_{3+\epsilon+\tau}$ d'après (80), on a nécessairement $u = gR_0(\mathbf{k}_\ell, E)f \in \mathrm{H}^{2,3+\epsilon+\tau}(\mathbb{R}\times\mathcal{S}) = \mathrm{H}^2(\mathbb{R}\times\mathcal{S}, (1+x_1^2)^{(3+\epsilon+\tau)/2}\mathrm{d}x)$. Or un tel état guidé appartient à $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$ donc cela entraîne bien que $u \in \cap_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{H}_m$.

Enfin dans le cas où $|\mathbf{k}_\ell| = E^{1/2}$, le point clé de la démonstration est qu'un état guidé $u \in \mathcal{H}_\tau$, $\tau \geq 0$, associé à $\mathbf{k}_\ell$, vérifie forcément, en vertu de [12, Lemme 4.4], $\widetilde{W^2 u}(0, \mathbf{k}_\ell) = (\widetilde{W^2 u})'(0, \mathbf{k}_\ell) = 0$, avec

$$\xi \mapsto \xi^{-2}\widetilde{W^2 u}(\xi, \mathbf{k}_\ell) \in \mathrm{H}^{1+\epsilon+\tau}(\mathbb{R}) \cap \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}),$$

de sorte que $u = gR_0(\mathbf{k}_\ell, E \pm \imath 0)W^2 u \in \mathcal{H}_{1+\epsilon+\tau}$ par [12, Lemme 4.5 et Proposition B.1].

Cas où W s'annule dans un demi-espace. Si l'existence éventuelle d'états guidés associés à des quasi-moments $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_E$ ne peut être écartée dans le cadre général examiné au Théorème 28, ce n'est par contre plus le cas lorsque la fonction $\mathbf{x} = (x_1, \mathbf{x}_\ell) \mapsto W(\mathbf{x})$ est suffisamment régulière par rapport à la variable $\mathbf{x}_\ell$, et qu'elle s'annule dans un demi-espace parallèle à la direction longitudinale $\mathbf{x}_\ell$.

Corollaire 29. *E et W étant comme dans la Proposition 26, on suppose de plus que :*

(i) $\mathbf{x}_\ell \mapsto W(x_1, \mathbf{x}_\ell) \in \mathrm{C}^4(\mathcal{S})$ p.p. $x_1 \in \mathbb{R}$ et s'annule dans un voisinage de la frontière $\partial\mathcal{S}$;

(ii) $W(x_1, \mathbf{x}_\ell) = 0$ p.p. $(x_1, \mathbf{x}_\ell) \in I \times \mathcal{S}$ où I est un sous-intervalle non borné de $\mathbb{R}$.

Alors il existe une constante $\tilde{g}_0 > 0$ telle que pour tout $g \in (0, \tilde{g}_0)$, le quasi-moment $\mathbf{k}_\ell$ de n'importe quel état guidé d'énergie E appartient à $\mathcal{C}_g(E)$.

---

54. Pour tout $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}_E^+$ la limite $R_0(\mathbf{k}_\ell, E) = R_0(\mathbf{k}_\ell, E \pm \imath 0) = \lim_{\varepsilon\to 0} R_0(\mathbf{k}_\ell, E+\imath\varepsilon)$ existe au sens de la topologie de la norme de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}_E^-$ (resp. $\mathbf{k}_\ell \in \mathcal{B}\setminus\mathcal{B}_E$) alors $R_0(\mathbf{k}_\ell, E\pm\imath 0) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} R_0(\mathbf{k}_\ell, E\pm\imath\varepsilon)$ existe au sens de la topologie de la norme de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_\sigma, \mathcal{H}_{-\sigma})$ (resp. de $\mathcal{B}(\mathcal{N}\mathcal{H}_\sigma(\mathbf{k}_\ell), \mathcal{N}\mathcal{H}_\sigma(\mathbf{k}_\ell)'))$ à condition que $\sigma > 1/2$ (resp. $\sigma > 1$). Ici, $\mathcal{N}\mathcal{H}_\sigma(\mathbf{k}_\ell) = \{u \in \mathcal{H}_\sigma,\ \tilde{u}(0, \mathbf{k}_\ell) = 0\}$ est un hyperplan fermé de $\mathcal{H}_\sigma$.

4 Problèmes inverses pour les opérateurs de Maxwell et de Schrödinger non stationnaires

4.1 Sur la stabilité dans les problèmes aux limites inverses

Il existe *a priori* plusieurs types d'inégalités de stabilité potentiellement associées à un problème aux limites inverse donné. Celles-ci peuvent être formellement distinguées selon, par exemple, leur nature (en pratique lipschitzienne, höldérienne ou logarithmique), leur caractère local ou global (par rapport à une certaine classe de coefficients inconnus), mais aussi le nombre de données requises ou les normes utilisées (tant pour les coefficients inconnus que pour les observations). Evidemment, le choix de la norme pour les données détermine directement la nature de l'information (interne ou latérale, et dans ce dernier cas, globale ou locale) assurant le contrôle des paramètres inconnus. Mais c'est en définitive le nombre d'observations nécessaires qui permet, en première analyse, de distinguer le plus facilement deux des techniques les plus utilisées dans la construction d'une inégalité de stabilité. La plus ancienne des deux, qui a permis d'obtenir la stabilité dans bon nombre de problèmes aux limites inverses associés à quasiment tous les opérateurs classiques de la physique mathématique, utilise l'opérateur Dirichlet-Neumann (noté DN en abrégé dans ce qui suit) dont la connaissance requiert généralement un nombre infini (non dénombrable) de mesures (latérales et pas forcément globales) de la solution du problème considéré. La seconde méthode, proposée par Bukhgeim et Klibanov dans l'article fondateur [19], ne nécessite *a contrario* qu'un nombre fini d'observations grâce à l'utilisation d'une inégalité de Carleman ad-hoc. Leur stratégie consiste essentiellement à "linéariser" l'EDP considérée, puis à [55]dériver l'équation obtenue par rapport au paramètre temporel afin d'isoler les coefficients à identifier dans le terme source ou la condition initiale qui lui est attachée. L'inégalité de stabilité cherchée s'obtient alors en appliquant une estimation de Carleman adaptée au système ainsi obtenu. Tous les résultats énoncés dans cette section 4 découlent en fait de cette méthodologie.

La forme d'une inégalité de Carleman est déterminée par le système auquel elle s'applique. Il en existe ainsi différents types, correspondant aux divers opérateurs classiques de la physique mathématique. Une étape cruciale de la méthodologie introduite par Bukhgeim et Klibanov consiste d'ailleurs à établir une inégalité de Carleman adaptée à l'opérateur décrivant le modèle spécifique étudié. Schématiquement, une telle inégalité peut être vue comme une estimation, associée à un poids particulier, de l'énergie du système considéré. Le choix de ce poids joue un rôle particulièrement important dans la détermination de l'inégalité de Carleman. La fonction poids doit en fait vérifier une propriété dite de "forte pseudo-convexité" par rapport à l'opérateur étudié (voir [59]). Sa forme (et donc celle de l'inégalité de Carleman elle-même) est ainsi déterminée par le type de l'EDP considérée. Ceci apparaîtra clairement dans le cas particulier des équations de Maxwell et de Schrödinger, dont l'étude est l'objet de la suite de cette section 4. Avant de détailler plus avant les résultats correspondants, il convient de noter la présence de termes de contrôle s'exprimant à l'aide d'intégrales de surface dans les inégalités de Carleman des Propositions 31 et 34. Ces termes de bord sont en fait souvent privilégiés dans l'étude des [56]problèmes inverses car ils permettent d'identifier les coefficients inconnus à partir d'observations latérales, réputées plus accessibles que leurs homologues internes. De plus, dans le cas des équations hyperboliques ou de [57]type Schrödinger, le domaine d'observation est généralement réduit à un sous-ensemble strict de la frontière du domaine sur lequel est défini le système, ce qui permet *in fine* un contrôle lateral local du problème inverse associé. Néanmoins, et contrairement à ce qui se produit avec les inégalités de

55. Cette étape impose en pratique que les paramètres à identifier soient indépendants du temps. Cette hypothèse n'est par contre pas nécessaire si l'on recourt à l'opérateur DN.
56. Ceux de la section 4 n'échappent pas à cette règle.
57. Voir notamment la Proposition 31.

Carleman paraboliques, cette surface d'observation ne peut être choisie arbitrairement lorsque le système est, par exemple, hyperbolique ou de type Schrödinger. Elle doit en effet satisfaire la *condition de contrôle géométrique* introduite par Bardos, Lebeau et Rauch dans [3], qui est essentiellement une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité et stabilisation pour l'équation des ondes associées. Cependant, du fait de la vitesse de propagation infinie des ondes quantiques, cette notion de contrôle géométrique n'est pas complètement [58]naturelle dans le contexte du contrôle des equations de Schrödinger.

La suite de cette section 4 va permettre de mettre en lumière l'utilité des inégalités de Carleman dans l'établissement d'une estimation de stabilité uniforme pour :

a) le potentiel magnétique à partir d'un nombre fini de mesures latérales et locales de la solution de l'équation de Schrödinger magnétique, et

b) la perméabilité magnétique et la permittivité diélectrique des équations de Maxwell, à partir d'un nombre fini d'observations latérales des seules composantes, normale de l'induction électrique, et tangentielle du champ magnétique.

4.2 Stabilité uniforme dans l'identification du potentiel magnétique de l'équation de Schrödinger non autonome

Le problème de l'identification du potentiel (en fait du champ) magnétique apparaissant dans un Hamiltonien quantique à partir de l'opérateur de Dirichlet-Neumann, a été l'objet de nombreuses études dans le cas stationnaire. C'est notamment le cas de [90, 78, 91, 86, 38, 32, 92, 11], dans lesquels les améliorations portent tout autant sur l'affaiblissement des conditions de régularité requises pour le potentiel à reconstruire que sur la taille de l'ouvert d'observation. Les références [59]disponibles traitant du même problème dans le cas de l'opérateur de Schrödinger magnétique dynamique sont par contre beaucoup moins nombreuses, même si [39, 6] ont été publiés récemment sur le sujet. Dans tous les travaux cités jusqu'ici la connaissance d'un nombre *a priori* infini de données est nécessaire à la détermination du potentiel magnétique. Le premier [60]résultat d'identification de ce vecteur à partir d'un nombre fini de mesures (latérales et locales) a été publié récemment dans [20]. Il fait l'objet de la suite de cette section 4.2.

4.2.1 Inégalité de stabilité uniforme

Classe de jauge de Coulomb. Le principal résultat obtenu dans [20] est une inégalité de stabilité uniforme de type Lipschitz sur les vecteurs potentiels magnétiques pris dans la classe de jauge de Coulomb (i.e. à divergence nulle). Cette condition (qui n'est *a priori* pas indispensable à l'établissement d'une telle inégalité) n'est pas une réelle limitation de la généralité de ce résultat. En effet, pour la physique classique, seul le champ magnétique a un sens. Le potentiel magnétique, lui, n'est qu'un objet mathématique permettant de définir le champ, et n'est défini qu'à une classe de jauge [61]près. Le choix de la classe de Coulomb se justifie ici simplement par le fait qu'elle procure une expression simplifiée de l'opérateur différentiel étudié, en éliminant l'un de ses termes d'ordre 0.

L'équation de Schrödinger magnétique. Etant donnés $T > 0$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, de frontière Γ supposée de classe C^2, on se donne l'Hamiltonien quantique dépendant du temps $H_{\mathbf{a}}(t) = (\imath\nabla + \chi(t)\mathbf{a})^2$ associé au potentiel magnétique

58. Néanmoins Lebeau a montré dans [70] que cette condition garantit la contrôlabilité dans H^{-1} de l'équation de Schrödinger à partir d'un contrôle frontière L^2.

59. Dans la littérature mathématique.

60. Et encore le seul au jour d'aujourd'hui.

61. Ce qui est par ailleurs cohérent avec l'impossibilité mentionnée dans [90] d'identifier le potentiel magnétique à partir de l'opérateur DN, ce dernier étant effectivement invariant par transformation de jauge.

$\chi(t)\mathbf{a}(x)$, où $\chi \in \mathrm{C}^2([0,T];\mathbb{R})$ est telle que [62] $\chi(0) = 0$ et $\chi'(0) \neq 0$, et $\mathbf{a} \in \mathcal{H}_0 = \{\mathbf{b} \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega;\mathbb{R}^n),\ \mathrm{div}\ \mathbf{b} = 0\}$, puis l'on considère l'équation de Schrödinger non autonome

$$\begin{cases} -\imath u'(t,x) + H_{\mathbf{a}}(t)u(t,x) = 0, & (t,x) \in Q_T^+ = (0,T) \times \Omega \\ u(t,x) = 0, & (t,x) \in \Sigma_T^+ = (0,T) \times \Gamma \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{84}$$

pour la donnée initiale u_0, dans laquelle u' désigne la dérivée par rapport au temps t de la fonction u. Ayant fixés $\mathbf{a}_0 \in \mathcal{H}_0$ et $M > 0$, on définit ensuite la classe des potentiels magnétiques admissibles par :

$$\mathbf{A}(\mathbf{a}_0, M) = \{\mathbf{a} \in \mathcal{H}_0,\ \|\mathbf{a}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)^n} \leq M \text{ et } \mathbf{a}(\sigma) = \mathbf{a}_0(\sigma) \text{ p.p. } \sigma \in \Gamma\}.$$

Alors, quels que soient $\mathbf{a} \in \mathbf{A}(\mathbf{a}_0, M)$ et $u_0 \in \mathrm{H}^2(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, (84) admet une unique solution $u \in \mathrm{C}^0([0,T];\mathrm{H}^2(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega)) \cap \mathrm{C}^1([0,T];\mathrm{H}_0^1(\Omega))$ en vertu de [39, Lemme 2.1].

Inégalité de stabilité. Etant donné $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, on considère un sous-ensemble Γ_0 de la frontière Γ vérifiant

$$\{x \in \Gamma,\ (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\} \subset \Gamma_0, \tag{85}$$

où $\nu(x)$ désigne la normale unitaire extérieure à Γ calculée en $x \in \Gamma$.

Théorème 30. *([20, Théorème 1.1]) Les quantités n, Ω, Γ_0, $T > 0$, χ et $\mathbf{a}_0$ étant choisies comme ci-dessus, soient $\varepsilon > 0$ et n fonctions $u_{0,j} \in \mathrm{H}_0^{\max(6,n/2+1+\varepsilon)}(\Omega;\mathbb{R})$, $j = 1,\dots,n$, satisfaisant*

$$\det DU_0(x) \neq 0,\ x = (x_1,\dots,x_n) \in \Omega,\ \text{où } DU_0(x) = (\partial_{x_j} u_{0,i}(x))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Pour tout $\mathbf{a}$ (resp. $\tilde{\mathbf{a}}$) dans $\mathbf{A}(\mathbf{a}_0, M)$, on note ensuite u_j (resp. $\tilde{u}_j$) l'unique solution $\mathrm{C}^0([0,T];\mathrm{H}^2(\Omega) \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega))$ du système (84) *(resp.* (84) *dans lequel $H_{\mathbf{a}}(t)$ est remplacé par $H_{\tilde{\mathbf{a}}}(t)$) associé à la condition initiale $u_{0,j}$, $j = 1,\dots,n$. Alors, il existe une constante $C > 0$, dépendant seulement de $T, \Omega, \Gamma_0, M, \chi$, et $\{u_{0,j},\ j = 1,\dots,n\}$, telle que*

$$\|\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^n} \leq C \sum_{j=1}^n \left(\|\partial_\nu \partial_t (u_j - \tilde{u}_j)\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\Gamma_0)} + \|\partial_\nu \partial_t^2 (u_j - \tilde{u}_j)\|^2_{\mathrm{L}^2(0,T;\Gamma_0)} \right).$$

Cette estimation est très [63] similaire à celle établie dans [4, Théorème 1] pour le potentiel électrostatique de l'équation de Schrödinger. Ceci n'est évidemment pas fortuit puisque la méthode utilisée pour démontrer le Théorème 30 emprunte largement à celle mise en œuvre dans [4]. Néanmoins, comme nous allons le voir dans la section 4.2.2, l'une des difficultés techniques supplémentaires soulevées par ce problème si on le compare à celui étudié dans [4], tient à la présence de la quantité inconnue à la fois dans les coefficients des termes d'ordre 0 et d'ordre 1 de l'opérateur différentiel considéré.

4.2.2 Estimation de Carleman globale pour l'équation de Schrödinger magnétique

Symétrisation temporelle. Afin de [64] centrer les données du problème à l'instant initial $t = 0$, la solution u de (84) est étendue à $Q_T^- = (-T,0) \times \Omega$ en posant [65] $u(t,x) =$

62. Ces hypothèses ne sont pas réellement restrictives dans la mesure où le modèle initialement visé par [20] est celui d'une particule soumise à un champ laser de fréquence $\omega > 0$, ce qui (voir [28, Section XVIII.1.4.2.2]) correspond au cas particulier $\chi(t) = \sin(\omega t)$.

63. En ce sens que les quantités à identifier sont majorées par un nombre fini d'onservations latérales partielles.

64. Il s'agit de s'affranchir de la contrainte généralement imposée aux problèmes aux limites inverses paraboliques par ce type de technique de reconstruction, qui nécessite généralement que la solution du problème soit connue dans tout l'espace à un temps $t > 0$ fixé.

65. Ceci explique *a posteriori* la raison pour laquelle il est nécessaire d'imposer que u_0 soit à valeurs rélles.

$\overline{u(-t,x)}$ pour tout $(t,x) \in Q_T^-$. Ainsi, χ (et par voie de conséquence $H_{\mathbf{a}}$) ayant été préalablement prolongée par [66]imparité à $(-T,T)$, u est solution de l'équation de Schrödinger de (84) dans $Q_T = (-T,T) \times \Omega$. Imposant ensuite la condition aux limites de Dirichlet sur $\Sigma_T = (-T,T) \times \Gamma$, on peut désormais remplacer Q_T^+ par Q_T et Σ_T^+ par Σ_T dans (84).

Système linéarisé. Notant $\tilde{u}$ la solution (définie sur Q_T) du système (84) dans lequel $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathbf{A}(\mathbf{a}_0, M)$ a été substitué à $\mathbf{a}$, il résulte facilement de la double identité $\nabla.\mathbf{a} = \nabla.\tilde{\mathbf{a}} = 0$ que $v = u - \tilde{u}$ est solution du *système linéarisé*

$$\begin{cases} -\imath v'(t,x) + H_{\mathbf{a}}(t) v(t,x) = f(t,x), & (t,x) \in Q_T \\ v(t,x) = 0, & (t,x) \in \Sigma_T \\ v(0,x) = 0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{86}$$

où $f = \chi(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}).(2\imath\nabla + \chi(\mathbf{a} + \tilde{\mathbf{a}}))\,\tilde{u}$. La stratégie utilisée consiste à dériver (86) par rapport à t afin d'isoler le coefficient inconnu dans la donnée initiale d'un problème différentiel aux limites. Il s'avère ici qu'il est nécessaire de dériver deux fois consécutivement. En effet, $H_{\mathbf{a}}'(t)$ désignant l'opérateur $2\chi'\mathbf{a} \cdot (\imath\nabla + \chi\mathbf{a})$, il apparaît d'abord que $w = v'$ satisfait

$$\begin{cases} -\imath w'(t,x) + H_{\mathbf{a}}(t) w(t,x) = g(t,x) = f'(t,x) - H_{\mathbf{a}}'(t) v(t,x), & (t,x) \in Q_T \\ w(t,x) = 0, & (t,x) \in \Sigma_T \\ w(0,x) = 0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{87}$$

puis que $y = w'$ est solution de

$$\begin{cases} -\imath y'(t,x) + H_{\mathbf{a}}(t) y(t,x) = q(t,x) = g'(t,x) - H_{\mathbf{a}}'(t) w(t,x), & (t,x) \in Q_T \\ y(t,x) = 0, & (t,x) \in \Sigma_T \\ y(0,x) = -2\chi'(0)(\tilde{\mathbf{a}}(x) - \mathbf{a}(x)) \cdot \nabla u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{88}$$

Ayant ainsi fait apparaître la différence $\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}$ dans la condition initiale de (88), l'étape suivante consiste à établir une inégalité de Carleman adaptée à ce système, en fonction d'observations latérales partielles de y et w.

Inégalité de Carleman. Soit $\tilde{\beta}(x) = |x - x_0|^2$ pour tout $x \in \overline{\Omega}$, où x_0 a été préalablement fixé dans $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Il est clair que $\tilde{\beta} \in \mathrm{C}^4(\overline{\Omega}; \mathbb{R}_+)$ et satisfait les trois propriétés suivantes :

(i) $\exists C_0 > 0$, $|\nabla\tilde{\beta}(x)| \geq C_0$ pour tout $x \in \Omega$;

(ii) $\partial_\nu \tilde{\beta}(\sigma) = \nabla\tilde{\beta}(\sigma).\nu(\sigma) \leq 0$ p.p. $\sigma \in \Gamma_1 = \Gamma \backslash \Gamma_0$, où $\Gamma_0 \subset \Gamma$ obéit à (85) ;

(iii) $\exists \Lambda_1 > 0$, $\exists \epsilon > 0$, $\lambda |\nabla\tilde{\beta}(x).\zeta|^2 + D^2\tilde{\beta}(\zeta, \bar{\zeta}) \geq \epsilon |\zeta|^2$ pour tout $(x,\zeta) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda > \Lambda_1$, où $D^2\tilde{\beta} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{\beta}}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i,j \leq n}$ et $D^2\tilde{\beta}(\zeta, \bar{\zeta})$ désigne produit scalaire dans $\mathbb{C}^n$ de $D^2\tilde{\beta}\zeta$ avec ζ.

La propriété (iii) exprime en fait que $\tilde{\beta}$ est pseudo-convexe par rapport à l'opérateur $(-\Delta)$.

Posant ensuite $\beta = \tilde{\beta} + K$ avec $K > \|\tilde{\beta}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)}$, on introduit pour chaque $\lambda > 0$ les deux fonctions poids

$$\varphi(t,x) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda\beta(x)}}{(T+t)(T-t)} \text{ et } \eta(t,x) = \frac{\mathrm{e}^{2\lambda K} - \mathrm{e}^{\lambda\beta(x)}}{(T+t)(T-t)},\ (t,x) \in Q_T,$$

puis, pour $s > 0$, les opérateurs

$$M_1 = \imath\partial_t + \Delta + s^2 |\nabla\eta|^2 \text{ et } M_2 = \imath s\eta' + 2s\nabla\eta.\nabla + s(\Delta\eta),$$

66. Ce qui est possible car $\chi(0) = 0$.

qui sont respectivement les parties autoadjointe et anti-autoadjointe de $M_1 + M_2 = \mathrm{e}^{-s\eta} L \mathrm{e}^{s\eta}$, où $L = -\imath\partial_t - \Delta$. Enfin, la solution $y \in \mathrm{L}^2(-T,T;\mathrm{H}_0^1(\Omega))$ de (88) vérifiant $Ly \in \mathrm{L}^2(Q_T)$ et $\partial_\nu y \in \mathrm{L}^2(-T,T;\mathrm{L}^2(\Gamma))$ si [67] $u_0 \in \mathrm{H}_0^6(\Omega;\mathbb{R})$, on considère la fonctionnelle

$$I(y) = s^3\lambda^4 \|\mathrm{e}^{-s\eta}\varphi^{3/2}y\|^2_{\mathrm{L}^2(Q_T)} + s\lambda\|\mathrm{e}^{-s\eta}\varphi^{1/2}|\nabla y|\|^2_{\mathrm{L}^2(Q_T)} + \sum_{j=1,2}\|M_j e^{-s\eta}y\|^2_{\mathrm{L}^2(Q_T)},$$

qui obéit à l'inégalité de Carleman suivante.

Proposition 31. *([20, Proposition 3.3]) Les hypothèses étant celles du Théorème 30, soient $u_0 \in \mathrm{H}_0^6(\Omega;\mathbb{R})$ et $\mathbf{a}$, $\tilde{\mathbf{a}} \in \mathrm{A}(\mathbf{a}_0, M)$. Alors il existe trois constantes $\lambda_0 > 0$, $s_0 > 0$ et $C_1 = C_1(T, M, \Omega, \Gamma_0, \lambda_0, s_0, u_0) > 0$ telles que l'inégalité suivante*

$$I(y) \leq C_1 \left(s\lambda \sum_{\rho = y,w} \|\mathrm{e}^{-s\eta}\varphi^{1/2}\partial_\nu\beta^{1/2}\partial_\nu\rho\|^2_{\mathrm{L}^2(-T,T;\mathrm{L}^2(\Gamma_0))} + \|\mathrm{e}^{-s\eta}(\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a})\|^2_{\mathrm{L}^2(Q_T)^n} \right),$$

est vraie pour tout $\lambda \geq \lambda_0$ et tout $s \geq s_0$.

Cette inégalité, qui est un point clef dans la démonstration du Théorème 30, reste en fait valable pour n'importe quelle fonction poids $\tilde{\beta} \in \mathrm{C}^4(\overline{\Omega};\mathbb{R}_+)$ et n'importe quel sous-ensemble $\Gamma_0 \subset \Gamma$ qui obéissent aux trois conditions (i), (ii), (iii) précédentes. Sa démonstration requiert notamment un contrôle uniforme par rapport à $t \in [-T,T]$ (voir [20, Section 2.4.3.]) de la [68] charge et de l'énergie des systèmes (87) et (88), ce qui est assez difficile à justifier dans ce contexte où les opérateurs concernés ne sont pas autonomes.

La stabilité comme conséquence de la Proposition 31. La stratégie consiste essentiellement à majorer $\|\tilde{\mathbf{a}} - \mathbf{a}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)^n}$ par $I(y)$. On utilise pour cela la quantité $\mathcal{I} = \|\mathrm{e}^{-s\eta(0,.)}y(0,.)\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega)}$ qui a l'avantage de se mettre sous la forme

$$\mathcal{I} = 2\mathrm{Re}\left(\int_{-T}^0\int_\Omega \psi'(t,x)\overline{\psi(t,x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) = 2\mathrm{Im}\left(\int_{-T}^0\int_\Omega M_1\psi(t,x)\overline{\psi(t,x)}\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right),$$

où $\psi = \mathrm{e}^{-s\eta}y$. Ce qui entraîne $|\mathcal{I}| \leq 2\|M_1\psi\|_{\mathrm{L}^2(Q_T)}\|\psi\|_{\mathrm{L}^2(Q_T)}$, et donc finalement

$$|\mathcal{I}| \leq C_2 s^{-3/2}\lambda^{-2}\left(s^3\lambda^4\|\mathrm{e}^{-s\eta}\varphi^{3/2}y\|^2_{\mathrm{L}^2(Q_T)} + \|M_1(\mathrm{e}^{-s\eta}y)\|^2_{\mathrm{L}^2(Q_T)}\right),\ \lambda \geq \lambda_0,\ s \geq s_0,$$

pour une certaine constante $C_2 = C_2(T,\lambda_0) > 0$. L'inégalité de stabilité du Théorème 30 s'en déduit alors par application directe de l'inégalité de Carleman de la Proposition 31, en utilisant notamment le fait que $\eta(0,x) \geq \eta(t,x)$ pour tout $(t,x) \in Q_T$.

4.3 Inégalité de stabilité pour les coefficients électromagnétiques de l'opérateur de Maxwell hétérogène

Le problème de la détermination de la perméabilité magnétique et de la permittivité diélectrique dans les systèmes de Maxwell déborde largement du cadre de l'électromagnétisme (voir [83, 89]) puisque celle-ci trouve également son utilité dans l'identification des défauts dans les conducteurs (voir [56]) ou la localisation des éclairs lumineux (voir [79]), pour ne citer que ces deux exemples. S'il existe en fait bon nombre de publications mathématiques traitant ce problème avec l'application DN (voir par exemple [5, 87]), seule [73] ne l'aborde à partir de la connaissance d'un nombre fini de données latérales, et ceci dans le cas particulier d'un système bidimensionnel, la mesure étant prise sur la totalité de la frontière.

67. Il suffit en fait que l'on ait $\Delta^k u_0 \in \mathrm{H}^2(\Omega;\mathbb{R}) \cap \mathrm{H}_0^1(\Omega;\mathbb{R})$.
68. C'est-à-dire de la norme $\mathrm{H}^1(\Omega)$ de la solution.

Pour ce qui concerne l'identification stable des coefficients électromagnétiques isotropes à partir de deux mesures latérales de la solution des équations de Maxwell non stationnaires dans un domaine borné de $\mathbb{R}^3$, elle est démontrée dans [7]. La méthode utilisée s'appuie sur une inégalité de Carleman globale pour les systèmes de Maxwell hétérogènes avec condition aux limites de type "conducteur parfait". Comme cela va être détaillé dans la suite de cette section 4.3, cette estimation entraîne la stabilité höldérienne simultanée de la [69]perméabilité et de la permittivité pour ce type de modèles. La principale nouveauté et l'intérêt de ce résultat résident dans le fait que les données latérales qu'il utilise, sont définies à partir des seules composantes

(a) normale de l'induction électrique, et

(b) tangentielle du champ magnétique.

4.3.1 Equations de Maxwell non stationnaires pour un milieu continu parfait avec conditions au bord de conducteur parfait

Le modèle. Etant donné un milieu continu et parfait de perméabilité magnétique μ et de permittivité diélectrique ε, occupant une cavité modélisée par un domaine ouvert borné et simplement connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, dont la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ est supposée de classe C^∞, on considère les équations de Maxwell

$$\begin{cases} \mathbf{D}' - \mathrm{rot}(\mu\mathbf{B}) = 0, & \text{dans } Q_T = (-T,T)\times\Omega, \\ \mathbf{B}' + \mathrm{rot}(\varepsilon\mathbf{D}) = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mathrm{div}\,\mathbf{D} = \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mathbf{D}\wedge\nu = 0,\ \mathbf{B}\cdot\nu = 0, & \text{sur } \Sigma_T = (-T,T)\times\Gamma, \end{cases} \tag{89}$$

dans [70]lesquelles, suivant la notation adoptée dans la section 4.2, le symbole $'$ désigne la dérivation par rapport au paramètre temporel $t \in (-T,T)$, pour $T > 0$. Ici, l'induction électrique $\mathbf{D}$ et le champ magnétique $\mathbf{B}$ sont des fonctions de $(x,t) \in Q_T$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, μ et ε sont des fonctions à valeurs réelles de $x \in \Omega$, et $\nu(\sigma)$ désigne la normale unitaire extérieure à Γ calculée au point $\sigma \in \Gamma$. Les conditions aux limites imposées par la dernière ligne de (89) traduisent que la frontière Γ est un conducteur parfait. Enfin, les conditions initiales attachées à (89) s'écrivent :

$$\mathbf{B}(0,x) = \mathbf{B}_0(x),\ \mathbf{D}(0,x) = \mathbf{D}_0(x),\ x \in \Omega. \tag{90}$$

Dans la suite on suppose que $\mu, \varepsilon \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$ satisfont

$$\mu(x) \geq \mu_0 > 0,\ \varepsilon(x) \geq \varepsilon_0 > 0,\ x \in \overline{\Omega}. \tag{91}$$

Existence, unicité et régularité de la solution. L'opérateur $\imath A$, où

$$A\Phi = (\mathrm{rot}(\mu\mathbf{B}), -\mathrm{rot}(\varepsilon\mathbf{D})),\ \Phi = (\mathbf{D},\mathbf{B}) \in \mathrm{Dom}(A) = \mathrm{H}_0(\mathrm{rot};\Omega)\times\mathrm{H}(\mathrm{rot};\Omega),$$

avec $\mathrm{H}_0(\mathrm{rot};\Omega) = \{u \in \mathrm{H}(\mathrm{rot};\Omega),\ \gamma_\tau u = 0\}$, l'espace $\mathrm{H}(\mathrm{rot};\Omega)$ et l'application γ_τ étant définis dans la section 3.1.2, est autoadjoint dans $\mathcal{H} = \mathrm{L}^2(\Omega)^6$ muni du produit scalaire

$$\langle \Phi, \tilde{\Phi}\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \varepsilon\mathbf{D}, \tilde{\mathbf{D}}\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)^3} + \langle \mu\mathbf{B}, \tilde{\mathbf{B}}\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega)^3},\ \Phi = (\mathbf{D},\mathbf{B}) \in \mathcal{H},\ \tilde{\Phi} = (\tilde{\mathbf{D}},\tilde{\mathbf{B}}) \in \mathcal{H}.$$

Eu égard à (89), il est ensuite naturel de considérer les espaces fonctionnels

$$\mathrm{H}(\mathrm{div}\,0;\Omega) = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega)^3,\ \mathrm{div}\,u = 0\} \text{ et } \mathrm{H}_0(\mathrm{div}\,0;\Omega) = \{u \in \mathrm{H}(\mathrm{div}\,0;\Omega),\ \gamma_n u = 0\ \},$$

où γ_n désigne l'unique application linéaire continue de $\mathrm{H}(\mathrm{div};\Omega) = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega)^3,\ \mathrm{div}\,u \in \mathrm{L}^2(\Omega)\}$ sur $\mathrm{H}^{-1/2}(\Gamma)$ vérifiant $\gamma_n u = u\cdot\nu$ si $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\overline{\Omega})^3$. Comme $\mathcal{H}_0 = \mathrm{H}(\mathrm{div}\,0;\Omega)\times$

69. Plus exactement de l'inverse de chacune de ces quantités.
70. En fait, dans (89), la perméabilité est égale à μ^{-1} et la permittivité à ε^{-1}.

$\mathrm{H}_0(\operatorname{div} 0;\Omega)$ est fermé dans $\mathcal{H}$ et que $\mathcal{H}_0^{\perp} \subset \ker A$ en vertu de [27, Section IX.A, Propositions 1 et 2], la restriction

$$A_0\Phi = A\Phi,\ \Phi \in \mathrm{Dom}(A_0) = \mathrm{Dom}(A) \cap \mathcal{H}_0 = \mathcal{V},$$

est, d'après le théorème de Stone [28, Section XVII.A.4, Théorème 3], le générateur infinitésimal d'un groupe unitaire dans $\mathcal{H}_0$ de classe C^0. Comme (89)-(90) se réécrit sous la forme équivalente

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi' - A_0\Phi = 0 \\ \Phi(0) = \Phi_0, \end{array} \right. \quad \text{avec } \Phi = (\mathbf{D}, \mathbf{B}) \text{ et } \Phi_0 = (\mathbf{D}_0, \mathbf{B}_0), \tag{92}$$

ceci entraîne le :

Lemme 32. *Etant donné* $(\mathbf{D}_0, \mathbf{B}_0) \in \mathcal{V}$ *il existe une unique solution* $(\mathbf{D}, \mathbf{B}) \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R}; \mathcal{V}) \cap \mathrm{C}^1(\mathbb{R}; \mathcal{H})$ *à* (89)-(90).

De plus, on a $\mathcal{V} = \mathrm{H}_{\tau,0}(\mathrm{rot}, \operatorname{div} 0; \Omega) \times \mathrm{H}_{n,0}(\mathrm{rot}, \operatorname{div} 0; \Omega)$ d'après [27, Section IX.A.1, Remarque 1], où l'on a posé :

$$\mathrm{H}_{*,0}(\mathrm{rot}, \operatorname{div} 0; \Omega) = \{u \in \mathrm{H}^1(\Omega)^3,\ \operatorname{div} u = 0 \text{ et } \gamma_* u = 0\},\ * = \tau, n.$$

4.3.2 Stabilité höldérienne

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. On suppose désormais que la [71] vitesse de propagation locale $c = \mu\varepsilon$ satisfait la condition

$$\frac{3}{2} |\nabla \log c(x)| |x - x_0| \leq 1 - \frac{\varrho}{c_0},\ x \in \overline{\Omega}, \tag{93}$$

pour un certain réel $\varrho \in (0, c_0)$, où $c_0 = \mu_0\varepsilon_0$, les quantités μ_0 et ε_0 étant définies par (91).

Ensuite, étant donnés $M_0 > 0$ et $\tilde{\mu}, \tilde{\varepsilon} \in \mathrm{C}^2(\omega)$, où $\omega = \Omega \cap \mathcal{O}$ et $\mathcal{O}$ désigne un voisinage de Γ dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble des coefficients inconnus μ et ε admissibles est :

$$\Lambda_\omega(M_0) = \{(\mu, \varepsilon) \text{ satisfaisant (91) et (93)},\ \|(\mu, \varepsilon)\|_{\mathrm{C}^2(\overline{\Omega})^2} \leq M_0 \text{ et } (\mu, \varepsilon) = (\tilde{\mu}, \tilde{\varepsilon}) \text{ dans } \omega\}.$$

L'identification de (μ, ε) nécessitant, comme cela apparaitra dans la suite, deux mesures distinctes de $(\mathbf{D}, \mathbf{B})$, on considère deux jeux de conditions initiales $(\mathbf{D}_0^k, \mathbf{B}_0^k)$, $k = 1, 2$, permettant de définir la fonction $K : \Omega \to \mathbb{R}^{12 \times 6}$ suivante

$$K = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{B}_0^1 & \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{B}_0^1 & \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{B}_0^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{D}_0^1 & \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{D}_0^1 & \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{D}_0^1 \\ \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{B}_0^2 & \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{B}_0^2 & \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{B}_0^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{D}_0^2 & \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{D}_0^2 & \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{D}_0^2 \end{pmatrix}, \tag{94}$$

où $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^3$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Le résultat principal de [7] s'énonce comme suit :

Théorème 33. *([7, Théorème 1]) Soient* $(\mathbf{D}_0^k, \mathbf{B}_0^k) \in \mathrm{H}^2(\Omega)^3$, $k = 1, 2$, *choisis de telle façon qu'il existe un mineur* m *de taille* 6×6 *de* K, *défini par* (94), *vérifiant :*

$$m(x) \neq 0,\ x \in \overline{\Omega \setminus \omega}. \tag{95}$$

Etant donnés $T > c_0^{-1/2} \max_{x \in \overline{\Omega}} |x - x_0|$ *et* $(\mu_i, \varepsilon_i) \in \Lambda_\omega(M_0)$, $i = 1, 2$, *tels qu'il existe une constante* $M > 0$ *pour laquelle la solution* $(\mathbf{D}_i^k, \mathbf{B}_i^k)$ *de* (89)-(90), *où* (μ, ε) *et* $(\mathbf{D}_0, \mathbf{B}_0)$ *sont respectivement remplacés par* (μ_i, ε_i) *et* $(\mathbf{D}_0^k, \mathbf{B}_0^k)$, *vérifie :*

$$\|(\mathbf{D}_i^k, \mathbf{B}_i^k)\|_{\mathrm{C}^3(-T, T; \mathrm{W}^{2,\infty}(\Omega))} \leq M,\ k = 1, 2. \tag{96}$$

---

71. En fait le carré de celle-ci.

Alors il existe deux constantes $\kappa \in (0,1)$ et $C > 0$, ne dépendant que Ω, ω, T, M et M_0, telles que

$$\sum_{\lambda=\mu,\varepsilon} \|\lambda_2 - \lambda_1\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)} \leq C \left(\sum_{k=1,2} \left(\|(\mathbf{D}_2^k - \mathbf{D}_1^k)_\nu\|_{\mathcal{H}(\Sigma)} + \|(\mathbf{B}_2^k - \mathbf{B}_1^k)_\tau\|_{\mathcal{H}(\Sigma)} \right) \right)^\kappa,$$

où $\mathcal{H}(\Sigma)$ désigne l'espace de Hilbert $\mathrm{H}^3(-T,T;\mathrm{L}^2(\Gamma)) \cap \mathrm{H}^2(-T,T;\mathrm{H}^1(\Gamma))$ muni de la norme $\|u\|_{\mathcal{H}(\Sigma)} = \left(\|u\|^2_{\mathrm{H}^3(-T,T;\mathrm{L}^2(\Gamma))} + \|u\|^2_{\mathrm{H}^2(-T,T;\mathrm{H}^1(\Gamma))} \right)^{1/2}$.

Ici, $\mathbf{D}_\nu$ désigne la composante normale de la trace de $\mathbf{D}$ et $\mathbf{B}_\tau$ la composante tangentielle de celle de $\mathbf{B}$. Le Théorème 33 établit ainsi la stabilité höldérienne dans la détermination de la partie principale de l'opérateur de Maxwell au sein de la classe $\Lambda_\omega(M_0)$, à partir de la mesure superficielle des composantes normale de l'induction électrique et tangentielle du champ magnétique. L'ingrédient principal de la démonstration de ce résultat est l'inégalité de Carleman décrite dans la section 4.3.3 sous les hypothèses (91) et (93).

On remarque par ailleurs que la condition (95), qui est indépendante du choix des coefficients inconnus μ et ε, ne porte que sur les données initiales $(\mathbf{D}_0^k, \mathbf{B}_0^k)$, $k = 1,2$, de (90), et est de plus stable par rapport à des perturbations de classe $\mathrm{H}^2(\Omega)$. Plus précisément, si $(\mathbf{D}_0^k, \mathbf{B}_0^k)$ satisfait (95) alors il en va de même de $(\tilde{\mathbf{D}}_0^k, \tilde{\mathbf{B}}_0^k)$ pour peu que $\|(\tilde{\mathbf{D}}_0^k, \tilde{\mathbf{B}}_0^k) - (\mathbf{D}_0^k, \mathbf{B}_0^k)\|_{\mathrm{H}^2(\Omega)^6}$ soit assez petit. De plus il existe des choix effectifs de ces données initiales vérifiant (95). Il suffit par exemple d'imposer

$$\mathbf{B}_0^1(x) = \mathbf{e}_1,\ \mathbf{D}_0^1(x) = \mathbf{e}_3,\ \mathbf{B}_0^2(x) = \mathbf{D}_0^2(x) = \mathbf{e}_2,\ x \in \overline{\Omega \setminus \omega},$$

puis de sélectionner le mineur formé par les colonnes $2,3,4,9,10$ et 12 de K pour s'en convaincre. En fait, on note que la condition (95) impose essentiellement que

$$\sum_{k=1,2} |\mathbf{D}_0^k(x)| \geq c_* \text{ et } \sum_{k=1,2} |\mathbf{B}_0^k(x)| \geq c_*,\ x \in \overline{\Omega \setminus \omega}, \tag{97}$$

pour une certaine constante $c_* > 0$.

Enfin, on peut [72]remarquer que l'hypothèse (96) est automatiquement satisfaite dès lors que $\mu, \varepsilon \in \mathrm{C}^7(\overline{\Omega})$ et $(\mathbf{D}_0^k, \mathbf{B}_0^k) \in \mathrm{Dom}(A_0^7)$, $k = 1,2$, ce dernier espace étant dense dans $\mathcal{H}_0$.

4.3.3 Inégalité de Carleman globale pour les équations de Maxwell

Etant donné $(\mu_1, \varepsilon_1) \in \Lambda_\omega(M_0)$, il est bien connu que le système de Maxwell

$$\begin{cases} \mathbf{U}' - \mathrm{rot}(\mu_1 \mathbf{V}) = \mathbf{f}, & \text{dans } Q_T, \\ \mathbf{V}' + \mathrm{rot}(\varepsilon_1 \mathbf{U}) = \mathbf{g}, & \text{dans } Q_T, \\ \mathrm{div}\, \mathbf{U} = \mathrm{div}\, \mathbf{V} = 0, & \text{dans } Q_T, \\ \mathbf{U} \wedge \nu = 0,\ \mathbf{V} \cdot \nu = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases} \tag{98}$$

avec termes source $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathrm{H}^1(Q_T; \mathbb{R}^3)$ satisfaisant

$$\mathbf{f}(x,t) = \mathbf{g}(x,t) = 0,\ (t,x) \in (-T,T) \times \omega, \tag{99}$$

se découple en les deux systèmes indépendants suivants :

$$\begin{cases} \mathbf{U}'' - c_1 \vec{\Delta} \mathbf{U} + \mathscr{R}_1 \mathbf{U} = G_1, & \text{dans } Q_T \\ \mathbf{U} \wedge \nu = 0,\ \mathrm{rot}(\varepsilon_1 \mathbf{U}) \cdot \nu = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \mathbf{V}'' - c_1 \vec{\Delta} \mathbf{V} + \mathscr{S}_1 \mathbf{V} = G_2, & \text{dans } Q_T \\ \mathbf{V} \cdot \nu = 0,\ \mathrm{rot}(\mu_1 \mathbf{V}) \wedge \nu = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \end{cases}$$

72. En tirant parti du fait que la solution Φ de (92) appartient à $\cap_{p=0}^m \mathrm{C}^p([0,T]; \mathrm{Dom}(A_0^{m-p}))$ pour tout $m \geq 1$ si $\Phi_0 \in \mathrm{Dom}(A_0^m)$ et $\mu, \varepsilon \in \mathrm{H}^m(\Omega)$.

où $c_1 = \mu_1\varepsilon_1$, $G_1 = \mathbf{f}' + \mathrm{rot}(\mu_1\mathbf{g})$, $G_2 = \mathbf{g}' - \mathrm{rot}(\varepsilon_1\mathbf{f})$, et $\mathscr{R}_1 = \mathscr{R}_1(x,\partial)$, $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_1(x,\partial)$ sont deux opérateurs différentiels du premier ordre à coefficients bornés dans Ω. Cette nouvelle formulation permet, sous l'hypothèse (93), d'appliquer l'inégalité de Carleman globale [8, Théorème 1] pour les équations hyperboliques du second ordre, à chacun des deux systèmes précédents pris séparément. Notant $\mathbf{h} = (\mathbf{f},\mathbf{g})$ et $\mathbf{W} = (\mathbf{U},\mathbf{V})$, celle-ci garantit (voir [7, Lemme 2.1]) l'existence de deux constantes $s_1 > 0$ et $C_1 > 0$, qui ne dépendent que de Ω, ω, T et M_0, vérifiant

$$\begin{aligned} & C_1 s\left(\|\mathrm{e}^{s\eta}\nabla\mathbf{W}\|^2_{\mathrm{L}^2(Q_T)} + \|\mathrm{e}^{s\eta}\mathbf{W}'\|^2_{\mathrm{L}^2(Q_T)} + s^2\|\mathrm{e}^{s\eta}\mathbf{W}\|^2_{\mathrm{L}^2(Q_T)}\right) \\ \leq & \sum_{i=0,1}\|\mathrm{e}^{s\eta}\nabla^i\mathbf{h}\|^2_{\mathrm{L}^2(Q_T)} + \|\mathrm{e}^{s\eta}\mathbf{h}'\|^2_{\mathrm{L}^2(Q_T)} + s^3\mathrm{e}^{2d_0 s}\|\mathbf{W}\|^2_{\mathrm{H}^1(Q_T)} \\ & + s\left(\|\mathrm{e}^{s\eta}\nabla\mathbf{W}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma_T)} + \|\mathrm{e}^{s\eta}\mathbf{W}'\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma_T)} + s^2\|\mathrm{e}^{s\eta}\mathbf{W}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma_T)}\right), \end{aligned} \tag{100}$$

pour tout $s \geq s_1$. Ici, la fonction poids $\eta : \overline{Q_T} \to \mathbb{R}^*_+$ a pour expression $\eta(t,x) = \mathrm{e}^{\gamma\psi(t,x)}$ avec $\psi(x) = \psi_0(x) - \beta t^2 + \beta_0$ et $\psi_0(x) = |x - x_0|^2$, les constantes $\gamma > 0$ et $\beta_0 > 0$ étant arbitraires, et $\beta \in (0,\varrho)$, où ϱ est définie par (93), étant choisie de façon [73] que $\beta T^2 > \max_{x\in\overline{\Omega}}\psi_0(x) + \delta$ pour un certain $\delta > 0$. Enfin, $d_0 = \mathrm{e}^{\gamma(\beta_0 - \delta/2)}$.

Les conditions aux limites de type "conducteur parfait" vérifiées par $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$, [74] permettent ensuite de réduire les termes de bord apparaissant dans le membre de droite de (100), puis d'en déduire l'inégalité de Carleman globale suivante.

Proposition 34. *([7, Lemme 2.2]) Soit $(\mu_1,\varepsilon_1) \in \Lambda_\omega(M_0)$. Alors il existe deux constantes $C_2 > 0$ et $s_2 > 0$, ne dépendant que de Ω, ω, T et M_0, telles que l'inégalité suivante*

$$\begin{aligned} & C_2 s\left(\|\mathrm{e}^{s\eta}\nabla\mathbf{W}\|^2_{\mathrm{L}^2(Q_T)} + \|\mathrm{e}^{s\eta}\mathbf{W}'\|^2_{\mathrm{L}^2(Q_T)} + s^2\|\mathrm{e}^{s\eta}\mathbf{W}\|^2_{\mathrm{L}^2(Q_T)}\right) \\ \leq & \sum_{i=0,1}\|\mathrm{e}^{s\eta}\nabla^i\mathbf{h}\|^2_{\mathrm{L}^2(Q_T)} + \|\mathrm{e}^{s\eta}\mathbf{h}'\|^2_{\mathrm{L}^2(Q_T)} + s^3\mathrm{e}^{2d_0 s}\|\mathbf{W}\|^2_{\mathrm{H}^1(Q_T)} + \mathscr{B}_{s,\eta}(\mathbf{W}), \end{aligned}$$

où

$$\mathscr{B}_{s,\eta}(\mathbf{W}) = s\sum_{\mathbf{X}=\mathbf{U}_\nu,\mathbf{V}_\tau}\left(\|\mathrm{e}^{s\eta}\nabla_\tau\mathbf{X}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma_T)} + \|\mathrm{e}^{s\eta}\mathbf{X}'\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma_T)} + s^2\|\mathrm{e}^{s\eta}\mathbf{X}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Sigma_T)}\right),$$

soit satisfaite pour tout $s \geq s_2$ et toute solution $\mathbf{W} = (\mathbf{U},\mathbf{V})$ de (98)-(99).

Il est à noter que la condition (93) imposée à c_1 dans cet [75] énoncé est plus restrictive que la condition usuelle d'ellipticité uniforme génériquement utilisée dans ce cadre (voir [59]).

4.3.4 Problème inverse

La forme particulière de (98)-(99) est en fait celle du système linéarisé associé à (89). En effet, en reprenant les notations du Théorème 33 puis en posant $\mu = \mu_1 - \mu_2$ et $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, un calcul élémentaire montre que $\mathbf{U}_k = \mathbf{D}_1^k - \mathbf{D}_2^k$ et $\mathbf{V}_k = \mathbf{B}_1^k - \mathbf{B}_2^k$, $k = 1,2$, sont solutions du système linéarisé

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathbf{U}_k' - \mathrm{rot}(\mu_1\mathbf{V}_k) = \mathbf{f}_k = \mathrm{rot}(\mu\mathbf{B}_2^k), & \text{dans } Q_T \\ \mathbf{V}_k' + \mathrm{rot}(\varepsilon_1\mathbf{U}_k) = \mathbf{g}_k = -\mathrm{rot}(\varepsilon\mathbf{D}_2^k), & \text{dans } Q_T \\ \mathrm{div}\, U_k = \mathrm{div}\,\mathbf{V}_k = 0, & \text{dans } Q_T \\ \mathbf{U}_k \wedge \nu = 0,\ \mathbf{V}_k \cdot \nu = 0, & \text{sur } \Sigma_T, \end{array}\right. \tag{101}$$

73. Quitte à éventuellement agrandir $T > 0$.

74. Au moyen d'un changement de système de coordonnées locales, explicité dans [7, Section 2.3], qui a pour effet de remplacer le problème aux limites (98) posé dans Q_T par un problème équivalent dans $(-T,T)\times\mathbb{R}^3_+$.

75. Puisqu'il y est supposé que $(\mu_1,\varepsilon_1) \in \Lambda_\omega(M_0)$.

avec données initiales $\mathbf{U}_k(0,x)=0$ et $\mathbf{V}_k(0,x)=0$. Notant ensuite $\mathbf{X}_{k,j}(t,x)=\partial_t^j \mathbf{X}_k(t,x)$ pour $\mathbf{X}=\mathbf{U},\mathbf{V},\mathbf{f},\mathbf{g}$ et tout $j\in\mathbb{N}^*$, j dérivations successives de (101) par rapport à t établissent que $\mathbf{W}_{k,j}=(\mathbf{U}_{k,j},\mathbf{V}_{k,j})$ est solution du système

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathbf{U}_{k,j}'-\mathrm{rot}(\mu_1\mathbf{V}_{k,j})=\mathbf{f}_{k,j}, & \text{dans } Q_T\\ \mathbf{V}_{k,j}'+\mathrm{rot}(\varepsilon_1\mathbf{U}_{k,j})=\mathbf{g}_{k,j}, & \text{dans } Q_T\\ \mathrm{div}\,\mathbf{U}_{k,j}=\mathrm{div}\,\mathbf{V}_{k,j}=0, & \text{sur } Q_T\\ \mathbf{U}_{k,j}\wedge\nu=0,\ \mathbf{V}_{k,j}\cdot\nu=0, & \text{sur } \Sigma_T. \end{array}\right. \tag{102}$$

Posant $\mathbf{h}_{k,j}=(\mathbf{f}_{k,j},\mathbf{g}_{k,j})$, ceci entraîne, en vertu de la Proposition 34, que

$$C_2 s\left(\|\mathrm{e}^{s\eta}\nabla\mathbf{W}_{k,j}\|_{\mathrm{L}^2(Q_T)}^2+\|\mathrm{e}^{s\eta}\mathbf{W}_{k,j}'\|_{\mathrm{L}^2(Q_T)}^2+s^2\|\mathrm{e}^{s\eta}\mathbf{W}_{k,j}\|_{\mathrm{L}^2(Q_T)}^2\right)\leq \mathfrak{z}_{k,j}(s), \tag{103}$$

pour tout $s\geq s_2$, où l'on a posé

$$\mathfrak{z}_{k,j}(s)=\sum_{i=0,1}\|\mathrm{e}^{s\eta}\nabla^i\mathbf{h}_{k,j}\|_{\mathrm{L}^2(Q_T)}^2+\|\mathrm{e}^{s\eta}\mathbf{h}_{k,j}'\|_{\mathrm{L}^2(Q_T)}^2+s^3\mathrm{e}^{2d_0 s}\|\mathbf{W}_{k,j}\|_{\mathrm{H}^1(Q_T)}^2+\mathscr{B}_{s,\eta}(\mathbf{W}_{k,j}).$$

Appliquant maintenant l'inégalité élémentaire su [7, Lemme 3.2],

$$\|z(.,0)\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}^2\leq 2\left(s\|z\|_{\mathrm{L}^2(Q_T)}^2+s^{-1}\|z'\|_{\mathrm{L}^2(Q_T)}^2\right), \tag{104}$$

qui est valable pour tout $z\in\mathrm{H}^1(-T,T;\mathrm{L}^2(\Omega))$ et $s\geq s_*=s_*(T)>0$, successivement à $z=\mathrm{e}^{s\eta}\mathbf{U}_{k,1}$ puis à $z=\mathrm{e}^{s\eta}\partial_i\mathbf{U}_{k,1}$, $i=1,2,3$, il s'ensuit alors de (103) que

$$s^2\sum_{\lambda=\mu,\varepsilon}\left(Cs\|\mathrm{e}^{s\eta_0}\lambda\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}^2-\|\mathrm{e}^{s\eta_0}\nabla\lambda\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}^2\right)\leq\sum_{k=1,2}\mathfrak{z}_{k,1}(s), \tag{105}$$

et

$$\sum_{\lambda=\mu,\varepsilon}\left(Cs\|\mathrm{e}^{s\eta_0}\nabla\lambda\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}^2-\sum_{|\alpha|=2}\|\mathrm{e}^{s\eta_0}\partial^\alpha\lambda\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}^2\right)\leq\sum_{j,k=1,2}\mathfrak{z}_{k,j}(s), \tag{106}$$

pour une certaine constante $C>0$. Ici $\eta_0(x)$ désigne $\eta(0,x)$, $x\in\overline{\Omega}$, et s a été soit choisi suffisamment grand.

Ceci dit, l'information clé dans l'analyse de ce problème inverse est celle donnée par l'égalité

$$\mathbf{U}_{k,1}(0,x)=\mathrm{rot}(\mu\mathbf{B}_0^k),\ \mathbf{V}_{k,1}(0,x)=-\mathrm{rot}(\varepsilon\mathbf{D}_0^k), \tag{107}$$

qui découle immédiatement de (101). L'intérêt principal de (101)-(102) et (107) en vue de l'identification de μ et ε, tient en fait à la présence de ces deux coefficients inconnus dans les conditions initiales (107) attachées au système (102) lorsque $j=1$. En effet, (107) se réécrivant sous la forme équivalente suivante

$$K(x)\begin{pmatrix}\nabla\mu\\ \nabla\varepsilon\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{rot}\,\mathbf{B}_0^1 & 0\\ 0 & \mathrm{rot}\,\mathbf{D}_0^1\\ \mathrm{rot}\,\mathbf{B}_0^2 & 0\\ 0 & \mathrm{rot}\,\mathbf{D}_0^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu\\ \varepsilon\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\mathbf{U}_{1,1}(x,0)\\ -\mathbf{V}_{1,1}(x,0)\\ \mathbf{U}_{2,1}(x,0)\\ -\mathbf{V}_{2,1}(x,0)\end{pmatrix},$$

où K est la matrice définie par (94), une nouvelle application de (104) à, cette fois, $z=\mathrm{e}^{s\eta}|\nabla\mathbf{W}_{k,1}|$, établit, compte tenu de (97) et (103), que

$$\sum_{\lambda=\mu,\varepsilon}\left(C\sum_{|\alpha|=2}\|\mathrm{e}^{s\eta_0}\partial^\alpha\lambda\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}^2-\|\mathrm{e}^{s\eta_0}\nabla\lambda\|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}^2\right)\leq\sum_{j,k=1,2}\mathfrak{z}_{k,j}(s),$$

sous les conditions de (105)-(106). Il en r'esulte que

$$C \sum_{|\alpha| \leq 2} \sum_{\lambda=\mu,\varepsilon} \| \mathrm{e}^{s\eta_0} \partial^\alpha \lambda \|_{\mathrm{L}^2(\Omega)}^2 \leq \sum_{j,k=1,2} \mathfrak{z}_{k,j}(s),$$

si s est suffisamment grand, ce qui, du fait de l'inégalité $\min_{x \in \overline{\Omega}} \eta_0(x) > d_0$, implique finalement la stabilité höldérienne annoncée au Théorème 33.

5 Bibliographie

5.1 Liste des articles ayant servi de support à la rédaction de ce manuscrit

- E. Soccorsi, *Analyticity and asymptotic properties of the Maxwell operator's dispersion curves*, Math. Mod. Meth. in Appl. Sci. **11**, no 3 (2001), 387-406.
- J.-M. Combes, P. D. Hislop, E. Soccorsi, *Edge states for quantum Hall systems*, Cont. Math. **307** (2002), 69–81.
- P. D. Hislop, E. Soccorsi, *Edge Currents for Quantum Hall Systems, I. One-Edge, Unbounded Geometries*, Rev. Math. Phys. **20** (2008), 71–115.
- P. D. Hislop, E. Soccorsi, *Edge Currents for Quantum Hall Systems, II. Two-Edge, Bounded and Unbounded Geometries*, Ann. H. Poincaré **9** (2008), 1141–1171.
- P. Briet, G. Raikov, E. Soccorsi, *Spectral Properties of a Magnetic Quantum Hamiltonian on a Strip*, Asymptotic Analysis **58** (2008), 127–155.
- P. Briet, H. Kovařík, G. Raikov, E. Soccorsi, *Eigenvalue asymptotics in a twisted waveguide*, Comm. Part. Diff. Equ. **34**(2009), no. 8, 818–836.
- P. Briet, P. D. Hislop, G. Raikov, E. Soccorsi, *Mourre estimates for a 2D magnetic quantum Hamiltonian on strip-like domains*, Cont. Math. **500**(2010), 33–46.
- M. Cristofol, E. Soccorsi, *Stability estimate in an inverse problem for non-autonomous magnetic Schrödinger equations*, Appl. Anal. **90**(2011), no. 10, 1499–1520.
- M. Bellassoued, M. Cristofol, E. Soccorsi, *Inverse boundary problem for the dynamical heterogeneous Maxwell system*, à paraître à Inv. Prob.
- F. Bentosela, C. Bourrely, Y. Dermenjian, E. Soccorsi, *On the guided states of 3D biperiodic Schrödinger operators*, à paraître à Comm. Part. Diff. Equ.

5.2 Références bibliographiques

[1] A. B. Auld, *Acoustic fields and waves in solids, volume II*, Robert E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1990.

[2] Y. Avron, R. Seiler, B. Simon, *Charge deficiency, charge transport, and comparison of dimensions*, Comm. Math. Phys. **159** (1994), 399–422.

[3] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization from the boundary*, SIAM J. Control. Optim. **30** (1992), 1024–1165.

[4] L. Baudouin, J.-P. Puel, *Uniqueness and stability in an inverse problem for the Schrödinger equation*, Inv. Prob. **18** (2002), 1537–1554.

[5] M. I. Belishev, V. M. Isakov, *On the Uniqueness of the Recovery of Parameters of the Maxwell System from Dynamical Boundary Data*, Jour. of Math. Sci. **122**(2004), no. 5, 3459–3469.

[6] M. Bellassoued, M. Choulli, *Stability estimate for an inverse problem for the magnetic Schrödinger equation from the Dirichlet-to-Neumann map*, J. Func. Anal. **91**(2010), no. 258, 161–195.

[7] M. Bellassoued, M. Cristofol, E. Soccorsi, *Inverse boundary problem for the dynamical heterogeneous Maxwell system*, à paraître à Inv. Prob.

[8] M. Bellassoued, M. Yamamoto, *Carleman estimate with second large parameter for second order hyperbolic operators in a Riemannian manifold and applications in thermoelasticity cases*, Appl. Anal. **91**(2012), no. 1, 35–67.

[9] J. Bellissard, A. van Elst, H. Schulz-Baldes, *The noncommutative geometry of the quantum Hall effect*, J. Math. Phys. **35** (1994), 5373–5451.

[10] M. Ben-Artzi, Y. Dermenjian, J.-C. Guillot, *Acoustic waves in perturbed media : a spectral study*, Comm. Part. Diff. Equ. **14** (1989), 479–517.

[11] H. Ben Joud, *Stability estimate for an inverse problem for the Schrödinger equation in a magnetic field from the partial boundary measurements*, Inv. Prob. **25**(2009), no. 4, 45012–45034.

[12] F. Bentosela, C. Bourrely, Y. Dermenjian, E. Soccorsi, *On the guided states of 3D biperiodic Schrödinger operators*, à paraître à Comm. Part. Diff. Equ.

[13] F. A. Berezin, M. A. Shubin, *The Schrödinger equation*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), **66**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1991.

[14] M. Š. Birman, M. Z. Solomjak, *Quantitative analysis in Sobolev imbedding theorems and applications to spectral theory*, American Math. Society Translations Series 2, **114**, AMS, Providence R.I., 1980.

[15] T. Bouhennache, Y. Dermenjian, *Nouvelles propriétés des courbes et relation de dispersion en élasticité linéaire*, Math. Mod. Num. Ana. **33**(1999), no. 5, 1071–1090.

[16] P. Briet, P. D. Hislop, G. Raikov, E. Soccorsi, *Mourre estimates for a 2D magnetic quantum Hamiltonian on strip-like domains*, Cont. Math. **500** (2010), 33–46.

[17] P. Briet, H. Kovařík, G. Raikov, E. Soccorsi, *Eigenvalue asymptotics in a twisted waveguide*, Comm. Part. Diff. Equ. **34**(2009), no. 8, 818–836.

[18] P. Briet, G. Raikov, E. Soccorsi, *Spectral Properties of a Magnetic Quantum Hamiltonian on a Strip*, Asymptotic Analysis **58** (2008), 127–155.

[19] A. L. Bukhgeim, M. V. Klibanov, *Global uniqueness of class of multidimentional inverse problems*, Sov. Math. Dokl. **24** (1981), 244–247.

[20] M. Cristofol, E. Soccorsi, *Stability estimate in an inverse problem for non-autonomous magnetic Schrödinger equations*, Appl. Anal. **90**(2011), no. 10, 1499–1520.

[21] E. Croc, Y. Dermenjian, *Analyse spectrale d'une bande acoustique multistratifiée 1 : principe d'absorption limite pour une stratification simple*, SIAM J. Math. Anal. **26** (1995), 880–924.

[22] H. Cycon, R. Froese, W. Kirsch, B. Simon, *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*, Texts and Monographs in Physics, Springer Study Edition, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[23] J.-M. Combes, F. Germinet, *Stability of the edge conductivity in quantum Hall systems*, Comm. Math. Phys. **256** (2005), 159–180.

[24] J.-M. Combes, F. Germinet, P. D. Hislop, *On the quantization of Hall currents in presence of disorder*. Mathematical physics of quantum mechanics, 307–323 Lecture Notes in Phys., **690**, Springer, Berlin, 2006.

[25] J.-M. Combes, P. D. Hislop, Landau Hamiltonians with Random Potentials : Localization and the Density of States, *Comm. Math. Phys.* **177** (1996), 603–629.

[26] J.-M. Combes, P. D. Hislop, E. Soccorsi, *Edge states for quantum Hall systems*, Cont. Math. **307** (2002), 69–81.

[27] R. Dautray, J.-L. Lions, *Mathematical analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol. 3, Spectral theory and applications, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.

[28] R. Dautray, J.-L. Lions, *Mathematical analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol. 5, Evolution problems I, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.

[29] S. De Bièvre, J. V. Pulé, *Propagating edge states for a magnetic Hamiltonian*, Math. Phys. Electron. J. **5** (1999), Paper 3, 17 pp.

[30] T. C. Dorlas, N. Macris, J. V. Pulé, *Localization in single Landau bands*, J. Math. Phys., **177**, no 4 (1996), 1574–1595.

[31] T. C. Dorlas, N. Macris, J. Pulé, *Characterization of the spectrum of the Landau Hamiltonian with delta impurities*, Comm. Math. Phys. **204** (1999), 367–396.

[32] D. Dos Santos Ferreira, C. E. Kenig, J. Sjöstrand, G. Uhlmann, *Determining a magnetic Schrödinger operator from partial Cauchy data*, Comm. Math. Phys. **2** (2007), 467–488.

[33] P. Duclos, P. Exner, *Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions*, Rev. Math. Phys. **7**(1995), 73-102.

[34] P. Elbau, G. M. Graf, *Equality of bulk and edge Hall conductance revisited*, Comm. Math. Phys. **229** (2002), no. 3, 415–432.

[35] A. Elgart, G. M. Graf, J. H. Schenker, *Equality of the bulk and edge Hall conductances in a mobility gap*, Comm. Math. Phys. **259**(2005), 185-221.

[36] P. Exner, A. Joye, H. Kovařík, *Edge currents in the absence of edges*, Phys. Lett. A, **264**(1999), 124–130.

[37] P. Exner, A. Joye, H. Kovařík, *Magnetic transport in a straight parabolic channel*, J. Phys. **A 34** (2001), 9733–9752.

[38] G. Eskin, *Inverse problems for the Schrödinger operators with electromagnetic potentials in domains with obstacles*, Inv. Prob. **19** (2003), 985–996.

[39] G. Eskin, *Inverse problems for the Schrödinger equations with time-dependent electromagnetic potentials and the Aharonov-Bohm effect*, J. Math. Phys. **49**(2008), no. 2, 022105, 18 pp.

[40] P.Exner, H. Kovařík, *Spectrum of the Schrödinger operator in a perturbed periodically twisted tube*, Lett. Math. Phys. **73** (2005), 183–192.

[41] J. Fröhlich, G. M. Graf, J. Walcher, *On the extended nature of edge states of quantum Hall Hamiltonians*, Ann. H. Poincaré **1** (2000), 405–444.

[42] C. Fernández, G. Raikov, *On the singularities of the magnetic spectral shift function at the Landau levels*, Ann. Henri Poincaré **5** (2004), 381–403.

[43] C. Ferrari, N. Macris, *Spectral properties of finite quantum Hall systems*, Operator algebras and mathematical physics (Constanţa 2001), Theta, Bucharest (2003), 115–122.

[44] C. Ferrari, N. Macris, *Intermixture of extended edge and localized bulk energy levels in macroscopic Hall systems*, J. Phys. A : Math. Gen. **A 35** (2002), 6339–6358.

[45] C. Ferrari, N. Macris, *Extended edge states in finite Hall systems*, J. Math. Phys. **44**(2003), no. 9, 3734–3751.

[46] R. L. Frank, *On the scattering theory of the Laplacian with periodic boundary condition. I : Existence of wave operators*, Documenta Math. **8** (2003), 547–565.

[47] R. L. Frank, R. G. Shterenberg, *Scattering theory of the Laplacian with periodic boundary condition. II : Additional channels of scattering*, Documenta Math. **9** (2004), 57–77.

[48] N. Filonov, F. Klopp, *Absolute continuity of the spectrum of a Schrödinger operator with a potential which is periodic in some directions and decays in others*, Documenta Math. **9** (2004), 107–121.

[49] N. Filonov, F. Klopp, *Erratum to the paper "Absolute continuity of the spectrum of a Schrödinger operator with a potential which is periodic in some directions and decays in others"*, Documenta Math. **9** (2004), 135–136.

[50] N. Filonov, F. Klopp, *Absolute continuity of the spectrum for the isotropic Maxwell operator with coefficients that are periodic in some directions and decay in others*, Comm. Math. Phys. **258** (2005), 75–85.

[51] V. Geiler, M. Senatorov, *The structure of the spectrum of the Schrödinger operator with a magnetic field in a strip, and finite-gap potentials*, Math. sb. **188** (1997), 21–32 (en russe) ; traduction anglaise dans Sb. Math. **188** (1997), 657–669.

[52] V. Georgescu, C. Gérard, *On the virial theorem in quantum mechanics*, Comm. Math. Phys. **208** (1999), 275–281.

[53] C. Gérard, *Resonance theory in atom-surface scattering*, Comm. Math. Phys. **126**(1989), no. 2, 263–290.

[54] F. Germinet, A. Klein, *Explicit finite volume criteria for localization in continuous random media and applications*, GAFA **13** (2003), 1201–1238.

[55] F. Gesztesy, K. Makarov, *The Ξ operator and its relation to Krein's spectral shift function*, J. Anal. Math. **81** (2000), 139–183.

[56] S. He, V. G. Romanov, *Some explicit formulas for crack identification in conductors using boundary measurements of dc fields*, J. Appl. Phys. **85**(1999), no. 9, 6822–6827.

[57] P. D. Hislop, E. Soccorsi, *Edge Currents for Quantum Hall Systems, I. One-Edge, Unbounded Geometries*, Rev. Math. Phys. **20** (2008), 71–115.

[58] P. D. Hislop, E. Soccorsi, *Edge Currents for Quantum Hall Systems, II. Two-Edge, Bounded and Unbounded Geometries*, Ann. H. Poincaré **9** (2008), 1141–1171.

[59] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag New York, Inc., New York 1963.

[60] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **132**, Springer-Verlag New York, Inc., New York 1966.

[61] J. Kellendonk, T. Richter, H. Schulz-Baldes, *Edge channels and Chern numbers in the integer quantum Hall effect*, Rev. Math. Phys. **14** (2002) , 87–119.

[62] J. Kellendonk, H. Schulz-Baldes, *Boundary maps for C^*-crossed products with $\mathbb{R}$ with an application to the quantum Hall effect*, Comm. Math. Phys. **249** (2004), 611–637.

[63] J. Kellendonk, H. Schulz-Baldes, *Quantization of edge currents for continuous magnetic operators*, J. Funct. Anal. **209** (2004), 388-413.

[64] W. Kirsch, B. Simon, *Comparison theorems for the gap of Schrödinger operators*, J. Funct. Anal. **75** (1987), 396–410.

[65] W. Kirsch, B. Simon, *Corrections to the classical behavior of the number of bound states of Schrödinger operators*, Ann. Physics **183** (1988), 122–130.

[66] K. Kikuchi, H. Tamura *Limiting amplitude principle for acoustic propagators in perturbed stratified fluids*, J. Diff. Equ. **93** (1991), 260–282.

[67] M. G. Krein, *On the trace formula in perturbation theory*, Mat. Sb. **33** (1953), 597-626 (en russe).

[68] P. Kuchment, B. Vainberg, *On absence of embedded eigenvalues for Schrödinger operators with perturbed periodic potentials*, Comm. Part. Diff. Equ. **25**(2000), no. 9-10,1809–1826.

[69] H. Kunz, *The quantum Hall effect for electrons in a random potential*, Comm. Math. Phys. **112** (1987), 121–145.

[70] G. Lebeau, *Contrôle de l'équation de Schrödinger*, J. Math. Pures Appl. **9** (1992), no 3, 267–291.

[71] B. M. Levitan, I. S. Sargsyan, *Introduction to Spectral Theory. Selfadjoint Ordinary Differential Operators*, Nauka, Moscow, 1970.

[72] J. Li, M. Yamamoto, J. Zou, *Conditional stability and numerical reconstruction of initial temperature*, Comm. Pure Appl. Anal. **8**(2009), 361–382.

[73] S. Li, M. Yamamoto, *An inverse source problem for Maxwell's equations in anisotropic media*, Appl. Anal. **84**(2005), no. 10, 1051–1067.

[74] I. M. Lifshits, *On a problem in perturbation theory*, Uspekhi Mat. Nauk **7** (1952), 171-180 (en russe).

[75] E. Mourre, *Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators*, Comm. Math. Phys. **78** (1981), 391–408.

[76] N. I. Muskhelishvili, *Singular integral equations boundary problems of function theory and their applications to mathematical physics*, Dover Publications, 1992.

[77] N. Macris, P.-A. Martin, J. V. Pulé, *On edge states in semi-infinite quantum Hall systems*, J. Phys. : Math. Gen **A 32** (1999), 1985–1996.

[78] G. Nakamura, Z. Sun, G. Uhlmann, *Global identifiability for an inverse problem*, Math. Ann. **303** (1995), 377–388.

[79] M. Popov, S. He, R. Thottappillil, *Reconstruction of lightning currents and return stroke model parameters using remote electromagnetic fields*, J. Geophys. Res. **105**(2000), no. D19, 24469-24481.

[80] A. Pushnitskiĭ, *A representation for the spectral shift function in the case of perturbations of fixed sign*, Algebra i Analiz **9** (1997), 197–213 (en russe) ; traduction anglaise dans St. Petersburg Math. J. **9** (1998), 1181–1194.

[81] A. Pushnitski, *The spectral shift function and the invariance principle*, J. Funct. Anal. **183** (2001), 269–320.

[82] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics.* IV, Academic Press, 1978.

[83] V. G. Romanov, S.I. Kabanikhin, *Inverse problems for Maxwell's equations*, Inverse and Ill-Posed Problems Series no. 2, De Gruyter, 1994.

[84] L. Roques, M. Cristofol, *On the determination of the nonlinearity from localized measurements in a reaction-diffusion equation*, Nonlinearity **23**(2010), 675-686.

[85] H. Schulz-Baldes, J. Kellendonk, T. Richter, *Simultaneous quantization of the edge and bulk Hall conductivity*, J. Phys. A : Math. Gen. **33** (2000) , 27–32.

[86] M. Salo, *Inverse problem for nonsmooth first order perturbation of the Laplacian*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss ; **139** (2004), 1–67.

[87] M. Salo, C. Kenig, G. Uhlmann, *Inverse problems for the anisotropic Maxwell equations*, Duke Math. J. **157** (2011), no. 2, 369–419.

[88] E. Soccorsi, *Analyticity and asymptotic properties of the Maxwell operator's dispersion curves*, Math. Mod. Meth. in Appl. Sci. **11**, no 3 (2001), 387-406.

[89] J. C. Sten, P. K. Koivisto, *Determining both the permittivity and the permeability of small samples using cavity perturbation method*, Meas. Sci. Technol. **20**, 057001.

[90] Z. Sun, *An inverse boundary problem boundary value problem for the Schrödinger operator with vector potentials*, Trans. Am. Math. Soc. **338** (1992), 953–969.

[91] C. F. Tolmasky, *Exponentially growing solutions for nonsmooth first-order perturbations of the Laplacian*, SIAM J. Math. Anal. **29**(1998), no. 1, 116–133.

[92] L. Tzou, *Stability estimates for coefficients of magnetic Schrödinger equation from full and partial boundary measurements*, Comm. Part. Diff. Equ. **33** (2008), 1911–1952.

[93] K. von Klitzing, *New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance*, Phys. Rev. Lett. **45**, no 6 (1980), 494-497.

[94] D. Yafaev, *The low energy scattering for slowly decreasing potentials*, Comm. Math. Phys. **85** (1982), 177–196.

[95] W-M. Wang, *Microlocalization, percolation, and Anderson localization for the magnetic Schrödinger operator with a random potential*, J. Funct. Anal. **146** (1997), 1–26.

[96] C. H. Wilcox, *Scattering theory for diffraction gratings*, Applied Math. Sciences 46, Springer-Verlag, New York, 1984.

[97] C. H. Wilcox, *Sound propagation in stratified media*, Applied Math. Sciences 50, Springer-Verlag, New York, 1984.