Notions élémentaires d'algèbre linéaire

Table des matières

Dans tout ce qui suit, K désigne soit l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, soit celui des complexes $\mathbb{C}$.

1 Espace vectoriel

1.1 Définition

Un ensemble E non vide et muni :

(a) d'une loi de composition interne appelée $addition$ notée $+$ et d'élément neutre 0_E,

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \rightarrow & E \\ (x, x') & \mapsto & x + x', \end{array}$$

(b) d'une loi de composition externe de domaine K, appelé $multiplication\ par\ un\ scalaire$,

$$\begin{array}{ccc} K \times E & \rightarrow & E \\ (\lambda, x) & \mapsto & \lambda x, \end{array}$$

est un $espace\ vectoriel\ sur\ K$ (noté K-ev ou plus simplement ev lorsqu'il n'y a pas de confusion possible) si ces deux lois vérifient les conditions suivantes :

(i) $(x + x') + x'' = x + (x' + x''),\ \forall x, x', x'' \in E$

(ii) $x + x' = x' + x, \forall x, x' \in E$
(iii) $x + O_E = x,\ \forall x \in E$
(iv) $x + (-x) = O_E,\ \forall x \in E$
(v) $1.x = x,\ \forall x \in E$
(vi) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x,\ \forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in K$
(vii) $\lambda(x + x') = \lambda x + \lambda x',\ \forall x, x' \in E, \forall \lambda \in K$
(viii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,\ \forall x \in E, \forall \lambda, \mu \in K.$

Vocabulaire. *Un élément x de E s'appelle un $vecteur$ de E, et un élément λ de K s'appelle un $scalaire$.*

Remarque. *Dans un ev, il n'y a pas de multiplication entre deux vecteurs, mais entre un scalaire et un vecteur seulement. Dans la suite, afin de bien distinguer entre vecteurs et scalaires, tout vecteur $x \in E$ sera noté $\vec{x}$.*

Stabilité. *Pour simplifier, on peut dire qu'un K-ev est un ensemble non vide satisfaisant les deux conditions de $stabilit\acute{e}$ suivantes :*

$$\begin{array}{ll} (EV1) & \forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E \times E,\ \vec{u} + \vec{v} \in E \\ (EV2) & \forall \lambda \in K,\ \forall \vec{u} \in E,\ \lambda\vec{u} \in E. \end{array}$$

De plus il est facile de voir que $(EV1) + (EV2)$ se résume en :

$$\boxed{(EV) \quad \forall(\vec{u}, \vec{v}) \in E \times E,\ \forall(\lambda, \mu) \in K \times K,\ \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in E.}$$

1.2 Exemples

Exemple 1. *On choisit $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2 = \left\{ \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \right\}$. Par définition, on a :*

— *pour tout $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et tout $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$;*

— *pour tout tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\lambda\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$.*

On vérifie ainsi que E satisfait (EV) et donc que c'est un $\mathbb{R}$-ev
Ce résultat se généralise immédiatement à $\mathbb{R}^n$ pour tout $n \geq 2$.

Exemple 2. *On choisit $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}[X]$. Les vecteurs de E sont donc des polynômes. Autrement dit, $P \in E$ s'il existe $n \geq 0$ et des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que*

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n.$$

Par définition,

— *pour tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ de $\mathbb{R}[X]$ avec $n \leq m$, on a*

$$P + Q = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) X^k + \sum_{k=n+1}^{m} b_k X^k.$$

— *pour tout tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda P = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) X^k$.*

Il est donc évident que $\mathbb{R}[X]$ satisfait (EV), et donc que c'est un $\mathbb{R}$-ev.

Remarques. *L'ensemble $\mathbb{N}$ (resp. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$) n'est pas un $\mathbb{R}$-ev (ni un $\mathbb{C}$-ev d'ailleurs). En effet, si tel était le cas,*

$$\underbrace{(-1)}_{\in\mathbb{R}} \times \underbrace{2}_{\in\mathbb{N}} = -2, \text{ (resp. } \underbrace{\frac{1}{2}}_{\in\mathbb{R}} \times \underbrace{1}_{\in\mathbb{Z}} = \frac{1}{2}, \underbrace{\sqrt{2}}_{\in\mathbb{R}} \times \underbrace{1}_{\in\mathbb{Q}} = \sqrt{2})$$

appartiendrait à $\mathbb{N}$,(resp. à $\mathbb{Z}$, à $\mathbb{Q}$), ce qui est faux.
Par ailleurs, tout K-e.v E étant un ensemble non vide, choisissons $\vec{u}$ dans E. Comme $0 \in K$ et que E est un K-ev, $0\vec{u} = \vec{0}_E$ appartient à E. Tout ev E contient donc (au moins) le vecteur $\vec{0}_E$, appelé vecteur nul de E, et qu'il ne faut pas confondre le scalaire nul 0. Par exemple, le vecteur nul du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.3 Combinaison linéaire

Soient E un K-ev, I un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ (pour simplifier) et $\mathcal{F} = (\vec{f_i})_{i\in I}$ une famille (éventuellement infinie) de vecteurs de E (pour tout $i \in I$, $\vec{f_i}$ est donc un vecteur de E). On appelle combinaison linéaire (notée CL en abrégé) de vecteurs de $\mathcal{F}$, tout vecteur de E de la forme :

$$\sum_{j\in J} \lambda_j \vec{f_j}, \text{ où } \left\{ \begin{array}{ll} (i) & J \text{ est un sous-ensemble \underline{fini} de } I; \\ (ii) & \forall j \in J,\ \lambda_j \in K. \end{array} \right.$$

En clair, une CL de vecteurs de $\mathcal{F} \subset E$ est une somme FINIE de vecteurs du type $\lambda\vec{x}$ avec $\lambda \in K$ et $\vec{x} \in \mathcal{F}$.

Exemple. *On prend $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}[X]$. On se donne ensuite N dans $\mathbb{N}$, et on pose*

$$\mathcal{F} = \{1, X, X^2, \ldots, X^N\},$$

où, si l'on utilise les notations de la définition : $I = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ et $\vec{f_i} = X^i$ pour tout $i \in I$. Une CL de vecteurs de $\mathcal{F}$ est donc un élément de $\mathbb{R}[X]$ du type

$$a_0 + a_1 X + \ldots + a_N X^N,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_N$ sont des réels (éventuellement nuls). Autrement dit, une CL de vecteurs de $\mathcal{F}$ est un polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à N. Réciproquement, tout polynôme à coefficients réels de degré inférieur ou égal à N est, par définition, une CL de vecteurs de $\mathcal{F}$.

Remarque. *Examinons le cas particulier où $\mathcal{F} = E$. La condition (EV) garantit que toute CL de vecteurs de E appartient à E (ce que l'on résume en disant que E est stable par CL) et récriproquement que tout ensemble non vide et stable par CL est un ev :*

$$\boxed{E = \text{ev} \iff E \text{ est un ensemble non vide qui est stable par CL.}}$$

1.4 Sous-espace vectoriel

Soit E un K-ev.

1.4.1 Définition

Tout sous-ensemble F non vide de E, qui est stable par CL, c'est-à-dire qui satisfait les deux conditions suivantes :

(i) $\vec{x} + \vec{x'} \in F,\ \forall \vec{x}, \vec{x'} \in F$

(ii) $\lambda\vec{x} \in F,\ \forall \lambda \in K,\ \forall \vec{x} \in F$

est un sous-espace vectoriel (sev en abrégé) de E. C'est donc un K-ev qui est inclus dans E.

Remarque. *Si F est un sev de E alors $\vec{0}_E \in F$. Ainsi, pour prouver que $F \subset E$ est un sev de E, il suffit de vérifier les deux conditions suivantes :*

(a) $\vec{0}_E \in F$

(b) $\lambda\vec{x} + \vec{x'} \in F,\ \forall \lambda \in K,\ \forall \vec{x}, \vec{x'} \in F$.

De plus, le plus petit sev de E (au sens de l'inclusion $\subset$) est l'ensemble $\{\vec{0}_E\}$.

Exemple. *Pour tout* $N \geq 0$, $\mathbb{R}_N[X]$ *est un sev de* $\mathbb{R}[X]$.

Propriétés.

(a) La réunion de deux sev de E *N'EST PAS en général un sev de* E.

(b) L'intersection de deux sev de E *est un sev de* E.

1.4.2 Espace vectoriel engendré par une famille

$\mathcal{F} = (\vec{f_i})_{i\in I}$ *(où* $\emptyset \neq I \subset \mathbb{N}$*) désignant à nouveau une famille de vecteurs d'un* K*-ev* E*, on note* $\operatorname{vect}\mathcal{F}$ *l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de vecteurs de* $\mathcal{F}$ *:*

$$\boxed{\operatorname{vect}\mathcal{F} = \{\textit{CL de vecteurs de } \mathcal{F}\}.}$$

Il est facile de vérifier que c'est un sev de E*, appelé* $\textit{sev engendré par } \mathcal{F}$.

Exemple. *On reprend le cas de l'exemple précédent :* $K = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}[X]$ *et* $\mathcal{F} = \{1, X, X^2, \dots, X^N\}$*, où* N *est un entier fixé. D'après ce qui a été vu dans cet exemple,*

$$\operatorname{vect}\mathcal{F} = \mathbb{R}_N[X],$$

ce qui redémontre au passage que $\mathbb{R}_N[X]$ *est un sev de* $\mathbb{R}[X]$.

1.4.3 Somme de sev

Soient F_1 *et* F_2 *deux sev de* E*. On vérifie facilement que l'ensemble noté* $F_1 + F_2$ *et défini comme suit :*

$$\boxed{F_1 + F_2 = \{u_1 + u_2,\ u_1 \in F_1,\ u_2 \in F_2\},}$$

est un sev de E*. Il est appelé* $\textit{somme de } F_1 \textit{ et } F_2$.

Exemple. *Si* $E = \mathbb{R}^3$, $F_1 = \operatorname{vect}\{\vec{e_1}\}$ *où* $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$*, et* $F_2 = \operatorname{vect}\{\vec{e_2}\}$ *où* $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$*, on voit que*

$$F_1 + F_2 = (0xy).$$

Par ailleurs, on vérifie également que $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}_E\}$ *et il est bien connu que tout vecteur de* $(Oxy) = F_1 + F_2$ *s'écrit de façon unique sous la forme* $\vec{x_1} + \vec{x_2}$ *avec* $\vec{x_1} \in F_1$ *et* $\vec{x_2} \in F_2$*. En d'autres termes :*

$$\forall \vec{x_1}, \vec{x_1'} \in F_1,\ \forall \vec{x_2}, \vec{x_2'} \in F_2,\ \vec{x_1} + \vec{x_2} = \vec{x_1'} + \vec{x_2'} \Longrightarrow \vec{x_1} = \vec{x_1'} \text{ et } \vec{x_2} = \vec{x_2'}.$$

Pour $G_1 = \operatorname{vect}\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ *et* $G_2 = \operatorname{vect}\{\vec{e_1} + \vec{e_2}\}$ *on a également* $G_1 + G_2 = (Oxy)$ *mais on remarque que* $G_1 \cap G_2 \neq \{\vec{0}_E\}$ *(car* $\vec{e_1} + \vec{e_2} \in G_1 \cap G_2$ *par exemple) et qu'il existe au moins deux décompositions distinctes de* $\vec{e_1}$ *dans* $G_1 + G_2$ *:*

$$\vec{e_1} = \underbrace{(-\vec{e_2}) + \vec{e_1}}_{\in G_1} + \underbrace{\vec{e_2}}_{\in G_2} = \underbrace{\vec{e_1}}_{\in G_1} + 0\underbrace{(\vec{e_1} + \vec{e_2})}_{\in G_2}.$$

1.4.4 Somme directe.

On dit que la somme $F_1 + F_2$ *est* $\textit{directe}$ *si* $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}_E\}$*. Dans ce cas on convient de noter* $F_1 \oplus F_2$ *à la place de* $F_1 + F_2$.

Propriété. *Si* $F_1 \oplus F_2$ *alors pour tout* $(\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in F_1 \times F_2$ *et* $(\vec{x_1'}, \vec{x_2'}) \in F_1 \times F_2$ *on a l'implication :*

$$\vec{x_1} + \vec{x_2} = \vec{x_1'} + \vec{x_2'} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \vec{x_1} & = & \vec{x_1'} \\ \vec{x_2} & = & \vec{x_2'}. \end{array} \right.$$

Autrement il existe une et une seule façon de décomposer un vecteur de $F_1 \oplus F_2$ *en la somme d'un vecteur de* F_1 *et d'un vecteur de* F_2.

Exemple. *Avec les définitions précédentes des vecteurs $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ de $\mathbb{R}^3$ et en posant $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on vérifie que :*

(a) $\mathrm{vect}\{\vec{e_1}\} \oplus \mathrm{vect}\{\vec{e_2}\} = (Oxy)$

(b) $\mathrm{vect}\{\vec{e_1}\} \oplus \mathrm{vect}\{\vec{e_1} + \vec{e_2}\} = (Oxy)$

(c) $\mathrm{vect}\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} \oplus \mathrm{vect}\{\vec{e_1}, \vec{e_3}\} = \mathbb{R}^3$ *mais cette somme n'est pas directe car :*

$$\begin{aligned} \vec{e_1} + \vec{e_2} &= 0\vec{e_1} + 0\vec{e_2} + 1(\vec{e_1} + \vec{e_2}) + 0\vec{e_3} \\ &= 1(\vec{e_1} + 0\vec{e_2}) + 0(\vec{e_1} + \vec{e_2}) + 0\vec{e_3}. \end{aligned}$$

1.4.5 Sous-espaces supplémentaires

Deux sev F_1 et F_2 de E sont dits $\textit{supplémentaires dans}$ E si $E = F_1 \oplus F_2$.

Remarque. *Par application des définitions de somme et de somme directe de deux sev introduites ci-dessus, on obtient :*

$$\begin{cases} E = F_1 + F_2 \Longleftrightarrow \forall \vec{x} \in E,\ \exists (\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in F_1 \times F_2 \text{ tel que } \vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2} \\ F_1 \oplus F_2 \Longleftrightarrow \text{la décomposition } \vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2} \text{ est unique,} \end{cases}$$

donc

$$\boxed{E = F_1 \oplus F_2 \Longleftrightarrow \forall \vec{x} \in E,\ \exists ! (\vec{x_1}, \vec{x_2}) \in F_1 \times F_2 \text{ tel que } \vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2}.}$$

La remarque précédente permet d'étendre la définition au cas de $n \geq 3$ sev $F_1, F_2, \ldots, F_n$ de E :

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \ldots \oplus F_n \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ \exists ! (\vec{x_1},\ \vec{x_2},\ \ldots, \vec{x_n}) \in F_1 \times F_2 \times \ldots F_n,\ \vec{x} = \vec{x_1} + \vec{x_2} + \ldots + \vec{x_n}.$$

Exemples.

(a) $\mathrm{vect}\{\vec{e_1}\} \oplus \mathrm{vect}\{\vec{e_2}\} \oplus \mathrm{vect}\{\vec{e_3}\} = \mathbb{R}^3$

(b) $\mathrm{vect}\{\vec{e_1}\} \oplus \mathrm{vect}\{\vec{e_1} + \vec{e_2}\} \oplus \mathrm{vect}\{\vec{e_2} + \vec{e_3}\} = \mathbb{R}^3$

(c) $\mathbb{R}_n[X] = \oplus_{i=1}^{n} \mathrm{vect}\{X^i\}$.

2 Base d'un espace vectoriel

Soit E un K-ev

2.1 Famille génératrice

Une famille $\mathcal{F} = (\vec{f_i})_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite $\textit{génératrice de}$ E si :

$$E = vect(\mathcal{F}).$$

Cela revient à dire que tout vecteur $\vec{u}$ de E peut se mettre sous la forme d'(au moins) une CL de vecteurs de $\mathcal{F}$:

$$\forall \vec{x} \in E,\ \exists J \subset I \text{ finie et } \lambda_j \in K,\ j \in J,\ \text{tel que } \vec{x} = \sum_{j \in J} \lambda_j \vec{f_j}.$$

Exemple.

(a) Pour tout $n \geq 1$, $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) $\{X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2)\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

(c) $\{X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2), X(X-3)\}$ est également une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice. *Trouver une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$.*

Propriétés.

(a) *Toute famille contenant une famille génératrice de E est génératrice de E.*

(b) *Toute famille extraite d'une famille non génératrice de E n'est pas génératrice de E.*

Remarque. *On choisit $K = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. Pour tout vecteur de $\vec{u}$ de $\mathbb{R}^2$, il existe x et y dans $\mathbb{R}$ tels que $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. C'est donc une CL de $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, puisque $\vec{u} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$. Cela montre que $\mathbb{R}^2 = \mathrm{vect}\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$, c'est-à-dire que $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. Remarquons que $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x-y)\vec{e_1} + y(\underbrace{\vec{e_1} + \vec{e_2}}_{\vec{f_2}})$, et donc que $\{\vec{e_1}, \vec{f_2}\}$ est également une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$. Tout comme $\{\vec{e_1}, \vec{f_2}, \underbrace{\vec{e_1} - \vec{e_2}}_{\vec{f_3}}\}$ d'ailleurs, puisque $\vec{u} = x\vec{e_1} + \frac{y}{2}\vec{f_2} - \frac{y}{2}\vec{f_3}$. Mais, on a aussi $\vec{u} = (x-y)\vec{e_1} + y\vec{f_2} + 0\vec{f_3}$, donc $\vec{u}$ ne se décompose pas de façon unique sur la famille $\{\vec{e_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$. Cela vient de ce que $\vec{f_3}$ est CL de $\vec{e_1}$ et $\vec{f_2}$, car $\vec{f_3} = 2\vec{e_1} - \vec{f_2}$. Afin d'éliminer les vecteurs "inutiles" du type de $\vec{f_3}$, on introduire mainteanant la notion d' indépendance linéaire.*

2.2 Indépendance linéaire

Une famille $\{\vec{f_i}, i \in I\}$ de vecteurs de E est dite $libre$ (dans E) si elle satisfait l'implication suivante :

$$\boxed{\text{Pour tout sous-ensemble } \underline{\text{fini}}\ J \text{ de } I,\ \forall \lambda_j \in K,\ j \in J,\ \left(\sum_{j \in J} \lambda_j \vec{f_j} = \vec{0}_E\right) \Longrightarrow (\forall j \in J, \lambda_j = 0).}$$

De façon équivalente, on dit que les vecteurs $\vec{f_i}$, $i \in I$, sont $lin\acute{e}airement\ ind\acute{e}pendants$.
S'il existe au contraire un nombre fini de scalaires $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_p}$ (avec $i_1, i_2, \ldots, i_p \in I$) <u>non tous nuls</u> tels que

$$\sum_{s=1}^{p} \lambda_{i_s} \vec{f_{i_s}} = \vec{0}_E,$$

on dit que la famille $\{\vec{f_i}, i \in I\}$ est $li\acute{e}e$ (dans E). Cela revient à dire que l'un de ses vecteurs, $\vec{f_{i_{s^*}}}$, est une CL des vecteurs de la famille $\{\vec{f_{i_s}}, 1 \leq s \leq p, s \neq s^*\}$.

Exemples.

(a) *Si l'on reprend le cas du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^2$ et les notations de l'exemple précédent, la famille $\{\vec{e_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ est liée car $2\vec{e_1} - \vec{f_2} - \vec{f_3} = \vec{0}$. Par contre, $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ est une famille libre, car pour tout λ et μ dans $\mathbb{R}$, on a :*

$$\left(\lambda\vec{e_1} + \mu\vec{e_2} = \vec{0}\right) \Longrightarrow \left(\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \Longrightarrow (\lambda = \mu = 0)\,.$$

(b) *Les familles $\{\sin, \cos\}$, $\{\sin, \exp\}$ et $\{\mathrm{sh}, \exp\}$ sont libres dans le $\mathbb{R}$-ev E des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Par contre la famille $\{\mathrm{sh}, \exp, 1/\exp\}$ est liée dans E.*

Propriétés.

(a) *Toute famille qui contient $\vec{0}_E$ est liée.*

(b) *Toute famille contenant une famille liée est liée.*

(c) *Toute sous-famille d'une famille libre est libre.*

2.3 Base

Une famille $\mathcal{B}$ de vecteurs de E est une $base\ de\ E$ si c'est une une famille libre <u>et</u> une famille génératrice de E.

Propriété fondamentale. *Dans une base $\mathcal{B} = \{\vec{e_i},\ i \in I\}$ de E, tout vecteur de E se décompose de façon unique en une CL de vecteurs de $\mathcal{B}$:*

$$\forall \vec{x} \in E,\ \exists! J \subset I \text{ et } (x_j)_{j\in J} \in K^J,\ \vec{x} = \sum_{j\in J} x_j \vec{e_j}.$$

Vocabulaire. *Les scalaires x_j, $j \in J$, sont appelés coordonnées ou composantes de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Exemples.

(a) $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (on l'appelle base canonique de $\mathbb{R}^2$), ce qui n'est pas le cas de $\{\vec{e_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ car cette famille est liée.

(b) Pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{B}_n = \{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, \ldots\}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Propriétés.

(a) Toute sous-famille stricte d'une base n'est pas génératrice (ie "une base est une famille génératrice minimale").

(b) Toute sur-famille stricte d'une base est liée (ie "une base est une famille libre maximale").

3 Dimension

3.1 Définitions

Un K-ev E sera dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. Dans la cas contraire il sera dit de dimension infinie.

Exemple. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie puisque $\{1, X, X^2, \ldots, X^n\}$ est une famille génératrice (à $n+1$ éléments) de $\mathbb{R}_n[X]$. Par contre $\mathbb{R}[X]$ ne possède aucune famille génératrice finie donc est de dimension infinie.*
On a par ailleurs le théorème (admis) essentiel suivant :

Théorème 3.1. *Tout ev possède au moins une base.*

Propriété. *Dans un ev de dimension finie E, toutes les bases ont même nombre d'éléments, appelé dimension de E et notée $\dim E$.*

Conséquence. *Si $\dim E = n \geq 1$, pour montrer que la famille à n vecteurs $\mathcal{B} = \{\vec{e_i},\ i \in I\}$ est une base de E, il suffit de vérifier que :*

(i) soit $\mathcal{B}$ est libre.

(ii) soit $\mathcal{B}$ est génératrice.

Exercice. *Soient $n \geq 1$ et $a_0 < a_1 < \ldots < a_n$ des réels. Pour chaque $0 \leq i \leq n$, on définit $i^{\text{ème}}$ polynôme d'interpolation de Lagrange*

$$P_i(x) = \frac{\displaystyle\prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (x - a_j)}{\displaystyle\prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} (a_i - a_j)}.$$

Montrer de deux façons différentes que $\{P_i,\ 0 \leq i \leq n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque. *E désignant toujours un K-ev de dimension n (éventuellement infinie), on vérifie que :*

(i) Toute famille génératrice de E possède AU MOINS n éléments.

(ii) Si la dimension n est finie, toute famille génératrice de E comportant n vecteurs est une base de E.

(iii) Toute famille libre de E possède AU PLUS n éléments.

(iv) Si la dimension n est finie, toute famille libre de E comportant n vecteurs est une base de E.

3.2 Dimension d'un sev

On suppose que $\dim E = n$ est finie et que F est un sev de E.
Toute famille de vecteurs de F qui est libre dans F est a fortiori libre dans E. Le nombre de vecteurs de F linéairement indépendants dans F est donc toujours inférieur ou égal à $\dim E$. Soit $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}\}$ une famille libre maximale de vecteurs de F. D'après ce qui précède, on a $p \leq \dim E$.
Ensuite, pour tout vecteur $\vec{f} \in F$, la famille $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}, \vec{f}\}$ est liée donc il existe $p+1$ scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda$ non tous nuls tels que $\lambda\vec{f} + \lambda_1\vec{f_1} + \ldots + \lambda_p\vec{f_p} = \vec{0}_E$. Comme $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}\}$ est libre on a forcément $\lambda \neq 0$, et donc :

$$\vec{f} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\vec{f_1} - \ldots - \frac{\lambda_p}{\lambda}\vec{f_p},$$

ce qui montre que $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}\}$ est une famille génératrice de F. Par suite, $\dim F = p \leq \dim E$.
Supposons maintenant que $\dim F = \dim E$. Alors la famille $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_n}\}$ qui est libre dans F est libre dans E donc c'est une base de E et donc une famille génératrice de E, ce qui montre que $E \subset F$ et donc que $E = F$ grâce à l'inclusion réciproque.

Propriété. *Si $\dim E$ est finie alors pour tout sev F de E, on a :*

(a) $\dim F \leq \dim E$

(b) $\dim F = \dim E \Longrightarrow \ F = E$.

Rang. *Le rang d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E, noté $\operatorname{rg}\mathcal{F}$, est la dimension du sev engendré par $\mathcal{F}$:*

$$\boxed{\operatorname{rg}\mathcal{F} = \dim(\operatorname{vect}\mathcal{F}).}$$

Vu ce qui précède, on a toujours $\operatorname{rg}\mathcal{F} \leq \dim E$ et $(\operatorname{rg}\mathcal{F} = \dim E) \Leftrightarrow (\operatorname{vect}\mathcal{F} = E)$.

3.3 Théorème de la base incomplète

Soit E un ev de dimension finie n. Commençons par faire la remarque suivante :

Remarque. *Si $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}\}$ une famille libre dans E et que $p < n$, alors il existe $\vec{g} \in E$ tel que $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}, \vec{g}\}$ est une famille libre dans E.*
En effet, dans le cas contraire tout vecteur de E serait CL des vecteurs $\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}$ donc $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}\}$ serait une famille génératrice et donc une base de E, ce qui impliquerait $p = \dim E = n$, ce qui est faux par hypothèse.
Ainsi partant d'une famille libre $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}\}$ à $p < n = \dim E$ éléments, il est toujours possible selon la remarque précédente d'ajouter des vecteurs à cette famille tout en conservant la propriété d'indépendance linéaire. Ceci jusqu'à ce que le nombre total de vecetурs obtenus soit égal à n. On construit ainsi une famille libre dans E dont la cardinalité est égale à $\dim E$: c'est une base de E. Ce qui démontre le :

Théorème 3.2. *Toute famille libre $\{\vec{f_1}, \ldots, \vec{f_p}\}$, $p < n$ dans l'ev E de dimension n peut être complétée en une base de E.*

3.4 Dimension de la somme de sev

Proposition 3.1. *Si F_1 et F_2 sont deux sev d'un ev de dimension finie E alors*

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim F_1 + \dim F_2 - \dim(F_1 \cap F_2).$$

Pour démontrer cette proposition, on considère une base $\mathcal{F} = \{\vec{f_1}, \dots, \vec{f_p}\}$ de $F_1 \cap F_2$. Comme $\mathcal{F}$ est une famille libre de F_1, le théorème 3.2 garantit l'existence de q vecteurs $\vec{g_1}, \dots, \vec{g_q}$ de F_1 tels que $\{\vec{f_1}, \dots, \vec{f_p}, \vec{g_1}, \dots, \vec{g_q}\}$ est une base de F_1. De même, il existe r vecteurs $\vec{g'_1}, \dots, \vec{g'_r}$ de F_2 complétant $\mathcal{F}$ en une base $\{\vec{f_1}, \dots, \vec{f_p}, \vec{g'_1}, \dots, \vec{g'_r}\}$ de F_2. Par suite $\mathcal{B} = \{\vec{f_1}, \dots, \vec{f_p}, \vec{g_1}, \dots, \vec{g_q}, \vec{g'_1}, \dots, \vec{g'_r}\}$ est une famille génératrice de $F_1 + F_2$. Afin de montrer qu'elle est libre, considérons la CL nulle suivante

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{f_i} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \vec{g_i} + \sum_{i=1}^{r} \beta_i \vec{g'_i} = \vec{0}_E,$$

les λ_i, α_i et β_i correspondants étant pris dans K. On a donc

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{f_i} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \vec{g_i} = -\sum_{i=1}^{r} \beta_i \vec{g'_i}.$$

Le membre de gauche de cette égalité appartenant à F_1 et celui de droite à F_2, on a forcément $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{f_i} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \vec{g_i} \in F_1 \cap F_2$ donc il existe p scalaires $\mu_1, \dots, \mu_p$ tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{f_i} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \vec{g_i} = \sum_{j=1}^{p} \mu_j \vec{f_j},$$

soit de façon équivalente

$$\sum_{i=1}^{p} (\lambda_i - \mu_i) \vec{f_i} + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \vec{g_j} = \vec{0}_E.$$

Or $\{\vec{f_1}, \dots, \vec{f_p}, \vec{g_1}, \dots, \vec{g_q}\}$ est une famille libre de E donc

$$\lambda_i = \mu_i,\ 1 \leq i \leq p,\ \text{et } \alpha_j = 0,\ 1 \leq j \leq q.$$

De manière identique on démontre en considérant le vecteur $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{f_i} + \sum_{j=1}^{r} \beta_j \vec{g'_j}$ que tous les β_j, $1 \leq j \leq r$, sont nuls. Ceci entraîne immédiatemment que $\lambda_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq p$ (puisque $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \vec{f_i} = \vec{0}_E$ et que $\mathcal{F}$ est une famille libre) et prouve ainsi que les veceturs de $\mathcal{B}$ sont linéairement indépendants.

Cas particulier de deux sev supplémentaires. *Dans le cas où $F_1 \oplus F_2$, on a $F_1 \cap F_2 = \{\vec{0}_E\}$ par définition donc $\dim F_1 \cap F_2 = 0$, ce qui permet de simplifier la formule précédente :*

$$\dim(F_1 \oplus F_2) = \dim F_1 + \dim F_2.$$

Conséquence : existence d'un supplémentaire. *E désignant toujours un ev de dimension finie et F un sev de E, il existe toujours G sev de E tel que*

$$F \oplus G = E.$$