

*Aix-Marseille Université
Institut Universitaire de Technologie
Département Réseaux et Télécommunications*

FONDAMENTAUX D'ALGÈBRE

Table des matières

1	Rappels sur les nombres réels	5
1.1	L'ensemble \mathbb{N}	5
1.1.1	Principe du raisonnement par récurrence	5
1.1.2	Dénombrement	5
1.2	L'ensemble \mathbb{R}	7
1.2.1	Propriétés liées à la relation d'ordre	7
1.2.2	Valeur absolue	8
1.2.3	Partie entière	8
1.2.4	Puissances et radicaux	8
2	Nombres complexes	11
2.1	Généralités	11
2.1.1	Construction de \mathbb{C}	11
2.1.2	Représentation géométrique d'un nombre complexe	13
2.2	Module et argument d'un nombre complexe	14
2.2.1	Représentation trigonométrique d'un nombre complexe	14
2.2.2	Module et argument du produit	15
2.3	Notation exponentielle	15
2.3.1	Fonction exponentielle complexe	15
2.3.2	Forme exponentielle d'un nombre complexe	15
2.3.3	Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité	17
2.3.4	Un exemple d'utilisation des nombres complexes en physique	18
3	Polynômes	19
3.1	Opérations sur les polynômes	19
3.1.1	Addition et produit par un nombre appartenant à K	19
3.1.2	Produit de deux polynômes	20
3.2	Division des polynômes	21
3.2.1	Division euclidienne	21
3.2.2	Division selon les puissances croissantes	22
3.3	Zéro d'un polynôme	22
3.3.1	Formule de Taylor	22
3.3.2	Racine et multiplicité	23
3.4	Factorisation des polynômes	24
3.4.1	Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$	24

3.4.2	Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$	24
4	Décomposition des fractions rationnelles	27
4.1	Généralités	27
4.1.1	Définition	27
4.1.2	Représentation des fractions rationnelles	27
4.1.3	Partie entière et pôles d'une fraction rationnelle	29
4.2	Décomposition	30
4.2.1	Décomposition de $\frac{P}{Q_1 Q_2 \dots Q_n}$	30
4.2.2	Décomposition dans \mathbb{C}	30
4.2.3	Décomposition dans \mathbb{R}	31

Chapitre 1

Rappels sur les nombres réels

1.1 L'ensemble \mathbb{N}

C'est l'ensemble des entiers naturels (c'est-à-dire des nombres "entiers positifs") :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Quel que soit n appartenant à \mathbb{N} , $n + 1$ appartient également à \mathbb{N} , ce qui, avec des quantificateurs, s'écrit aussi :

$$\forall n, (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow (n + 1 \in \mathbb{N}).$$

De plus, toute partie A de \mathbb{N} contenant 0, et qui est stable par l'application $n \rightarrow n + 1$, c'est-à-dire qui satisfait la condition

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \in A) \Rightarrow (n + 1 \in A),$$

est forcément égale à \mathbb{N} : $A = \mathbb{N}$.

Cette propriété est à la base du *raisonnement par récurrence*.

1.1.1 Principe du raisonnement par récurrence

Soit $P(n)$ un énoncé dépendant de l'indice n (qui est un entier naturel) tel que :

— $P(0)$ est vrai ;

— pour tout entier naturel n fixé, on a l'implication $(P(n) \text{ est vrai}) \Rightarrow (P(n + 1) \text{ est vrai})$.

Alors, en vertu du principe de raisonnement par récurrence, l'énoncé $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice. Pour tout réel $a \neq 1$, montrer par récurrence sur l'entier n que :

$$\underbrace{1 + a + a^2 + \dots + a^n}_{\sum_{p=0}^n a^p} = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

1.1.2 Dénombrement

Soient E un ensemble fini à n éléments, $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et p un entier de $\{1, 2, \dots, n\}$.

p -arrangements sans répétition de n éléments

On appelle p -arrangements sans répétition de n éléments de E toute liste ordonnée du type

$$(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}),$$

où les indices i_1, i_2, \dots, i_p sont deux à deux distincts (ce qui implique que les éléments d'une telle liste sont également deux à deux distincts). Ainsi, deux p -arrangements diffèrent :

- soit par la nature de leurs éléments ;
- soit par l'ordre dans lequel sont rangés ces éléments.

On note A_n^p le nombre (cardinal) de tous ces p -arrangements sans répétition de n éléments. On a donc :

$$A_n^p = A_n^{p-1} \times [n - (p - 1)].$$

D'où, successivement :

$$\begin{cases} A_n^{p-1} = A_n^{p-2} \times [n - (p - 2)] \\ A_n^{p-2} = A_n^{p-3} \times [n - (p - 3)] \\ \vdots \\ A_n^2 = A_n^1 \times (n - 1) \\ A_n^1 = n \end{cases}$$

En multipliant membre à membre ces égalités, on obtient finalement :

$$\boxed{A_n^p = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}$$

Si l'on introduit la notation $n!$, qui se lit *factorielle n* , où

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1,$$

avec la convention $0! = 1$, l'égalité précédente s'écrit simplement :

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

Cas particulier. Si $p = n$, A_n^p désigne alors le nombre de *permutations* (des n éléments) de E . D'après la formule précédente, le nombre de permutations de E est :

$$\boxed{p_n = n!}$$

Combinaisons de n éléments pris p à p

Toute sous partie F de E contenant p éléments, $F = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}\}$, dans laquelle ces éléments sont distincts et énoncés dans un ordre quelconque, est appelée *combinaison de n éléments pris p à p* . On note C_n^p leur nombre.

Les éléments de chacune de ces combinaisons pouvant être ordonnés de $p!$ façons différentes, on a donc

$$p!C_n^p = A_n^p,$$

ce qui implique :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Lorsque $p = 0$, il n'y a qu'un seul sous-ensemble de E ne contenant aucun élément (c'est l'ensemble vide). C'est pourquoi on convient de poser :

$$C_n^0 = 1$$

Propriétés des C_n^p . Les propriétés essentielles à retenir sont les suivantes :

$$\begin{array}{l} (i) \quad C_n^p \in \mathbb{N} \\ (ii) \quad C_n^p = C_n^{n-p} \\ (iii) \quad C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1} \quad (\text{formule de Pascal}) \end{array}$$

La formule de Pascal est à la base du triangle de Pascal.

Une application : la formule du binôme de Newton. Quels que soient les réels a et b , quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, on démontre (par récurrence sur n) la formule suivante (à connaître) :

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p}$$

1.2 L'ensemble \mathbb{R}

C'est l'ensemble des nombres réels qui contient (strictement) celui des nombres rationnels (noté \mathbb{Q}) :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

L'ensemble \mathbb{R} est muni d'une addition et d'une multiplication (ce sont des lois de composition interne). Elles satisfont notamment :

$$\begin{array}{l} (i) \quad (a+c = b+c) \Rightarrow (a=b) \\ (ii) \quad (ac = bc \text{ et } c \neq 0) \Rightarrow (a=b) \end{array}$$

L'implication (a) s'énonce en disant que *tout élément de \mathbb{R} est régulier pour l'addition*. Quant à (b), elle exprime que *tout élément non nul de \mathbb{R} est régulier pour la multiplication*.

D'autre part, il résulte de (ii) que :

$$(ab = 0) \Rightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$$

1.2.1 Propriétés liées à la relation d'ordre

L'ensemble \mathbb{R} est totalement ordonné par la relation \leq . Cette relation est *compatible avec l'addition* :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a \leq b) \Rightarrow (a+c \leq b+c),$$

et *compatible avec la multiplication par un réel positif* :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall c \in \mathbb{R}^+, (a \leq b) \Rightarrow (ac \leq bc).$$

Remarque 1.2.1 Attention de bien vérifier que $c \geq 0$ avant d'utiliser cette dernière implication.

1.2.2 Valeur absolue

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle *valeur absolue de x* , le réel positif noté $|x|$, qui est défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0; \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

On vérifie alors que $|x| = \max(x, -x)$, et l'on a les propriétés suivantes :

$(i) \quad x \in \mathbb{R}_+ \text{ et } (x = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$ $(ii) \quad xy = x y $ $(iii) \quad x - y \leq x + y \leq x + y $

Exercice. Vérifier que

$$\begin{cases} \max(x, y) = 1/2 (x + y + |x - y|) \\ \min(x, y) = 1/2 (x + y - |x - y|) \end{cases}$$

1.2.3 Partie entière

Soit x un réel. On appelle *partie entière de x* , le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x :

$$E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z}, n \leq x\}$$

Il résulte directement de cette définition que $E(x)$ est l'unique entier relatif satisfaisant la double inégalité suivante :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Exemples. $E(3.7) = 3$, $E(-2) = -2$, $E(-2.4) = -3$ et $E(-5.718) = -6$.

1.2.4 Puissances et radicaux

Il est facile de définir les puissances entières d'un réel x :

$$\begin{cases} x^0 = 1; \\ \forall n \in \mathbb{N}, x^{n+1} = x^n \times x; \\ \forall n \in \mathbb{N}, x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (x \neq 0). \end{cases}$$

Dans la suite du cours de 1^{ère} année, on verra que l'application $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) est une bijection de \mathbb{R}^+ sur lui-même, dont l'application réciproque permet de définir la *racine $n^{\text{ième}}$* , notée $\sqrt[n]{x}$, et définie par l'équivalence :

$$\begin{cases} \sqrt[n]{x} = y \\ y \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y^n \\ x \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

En clair, cela signifie que la racine $n^{\text{ième}}$ du réel positif x est l'unique réel positif y satisfaisant $x = y^n$. Pour tout $x \geq 0$, on note également $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ et plus généralement, si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$:

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}.$$

Les principales propriétés des exposants rationnels (à savoir) sont les suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall r, s \in \mathbb{Q}, \begin{cases} x^r x^s = x^{r+s} \\ (x^r)^s = x^{rs} \end{cases}$$

avec également :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \forall r \in \mathbb{Q}, (xy)^r = x^r y^r$$

Chapitre 2

Nombres complexes

Il est bien connu que l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans \mathbb{R} .

L'objectif de ce chapitre est de construire un nouvel ensemble de nombres, noté \mathbb{C} , et nommé *ensemble des nombres complexes*, qui soit tel que :

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;
- l'addition et la multiplication définies sur \mathbb{R} s'étendent à \mathbb{C} ;
- toute équation du second degré possède au moins une solution dans \mathbb{C} .

2.1 Généralités

2.1.1 Construction de \mathbb{C}

On rappelle que l'égalité de deux couples de réels est définie par

$$((a, b) = (a', b')) \iff \begin{pmatrix} a = a' \\ b = b' \end{pmatrix}.$$

On va définir sur l'ensemble de ces couples de réels, \mathbb{R}^2 , $\mathbb{R}^2 = \{(a, b); a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}$, une addition et une multiplication qui "prolongent" l'addition et la multiplication dans \mathbb{R} . L'ensemble \mathbb{R}^2 muni de ces deux opérations sera \mathbb{C} .

Addition et multiplication par un réel

Soient $z = (a, b)$ et $z' = (a', b')$ où a, a', b et b' sont des réels et soit λ un réel. Par définition, on pose :

$$\begin{cases} z+z' &= (a+a', b+b') \\ \lambda z &= (\lambda a, \lambda b). \end{cases}$$

On voit ainsi que

$$z = (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) \tag{2.1}$$

Le réel a s'appelle alors *partie réelle* de z , ce que l'on note $\operatorname{Re}(z) = a$, et le réel b s'appelle *partie imaginaire* de z , ce que l'on note $\operatorname{Im}(z) = b$.

Si $b = 0$ alors $z = a(1, 0)$: z est dit *réel* et l'on note plus simplement $z = a$.

Si $a = 0$ alors $z = b(0, 1)$: z est dit *imaginaire pur*. En posant ensuite

$$j = (0, 1),$$

on obtient tout simplement $z = bj$, ce qu'il est également d'usage de noter $z = jb$.

Toutes ces conventions permettent finalement de définir *l'écriture algébrique* de n'importe quel nombre complexe z ,

$$z = (a, b) = a + jb \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

qui est équivalente à (2.1).

Produit des deux nombres complexes

Soient $z = (a, b)$ et $z' = (a', b')$. Par définition on pose

$$z \times z' = (aa' - bb', ab' + a'b) = zz'.$$

On vérifie alors que $(0, 1)^2 = (-1, 0)$, c'est-à-dire avec les notations qui viennent d'être introduites :

$$\boxed{j^2 = -1}$$

De plus :

— $\underbrace{(1, 0)}_1 \times \underbrace{(a, b)}_z = (a, b) \times (1, 0) = (a, b)$ donc $1 \times z = z \times 1 = z$, ce qui montre que $1 = (1, 0)$ est élément neutre de la multiplication dans \mathbb{C} ;

— pour tout $z = (a, b) \neq (0, 0)$, le complexe $z' = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ vérifie $zz' = z'z = 1$. Tout complexe non nul z possède un inverse z' noté $\frac{1}{z}$.

On dit que \mathbb{C} (muni des opérations d'addition et de multiplication ainsi définies) est un *corps*. Les calculs dans \mathbb{C} obéissent aux lois habituelles de l'algèbre en tenant compte de l'égalité $j^2 = -1$.

Conjugaison

Pour tout $z = (a, b)$, on appelle *conjugué de z* le nombre complexe $\bar{z} = a - jb = (a, -b)$.

On remarque alors immédiatement que

$$\boxed{\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2j}}$$

Conséquence. On obtient directement les deux équivalences suivantes :

$$\begin{cases} (i) & z \text{ est réel} & \iff & z = \bar{z} \\ (ii) & z \text{ est imaginaire pur} & \iff & z = -\bar{z} \end{cases}$$

On vérifie ensuite facilement pour tous complexes z et z' , que :

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{z + z'} &= \bar{z} + \bar{z}' \\ \overline{zz'} &= \bar{z}\bar{z}' \\ \overline{\lambda z} &= \lambda \bar{z}, \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

Retour sur la résolution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$

Comme $a \neq 0$, on peut écrire

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{1}{4a^2} \underbrace{(b^2 - 4ac)}_{\Delta} \right] = 0.$$

Ainsi, pour chaque $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$, on aura :

$$\begin{aligned} (ax^2 + bx + c = 0) &\iff \left(\left[x + \frac{b}{2a} \right]^2 - \frac{\delta^2}{4a^2} = 0 \right) \\ &\iff \left(\left[x - \frac{-b + \delta}{2a} \right] \left[x - \frac{-b - \delta}{2a} \right] = 0 \right) \\ &\iff \left(x = \frac{-b \pm \delta}{2a} \right) = x_{\pm}. \end{aligned}$$

Maintenant, si

- $\Delta > 0$, $\delta = \pm\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$, et $x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ sont deux racines réelles distinctes ;
- $\Delta = 0$, $\delta = 0$, donc $x_+ = x_- = \frac{-b}{2a}$ est l'unique racine réelle ;
- $\Delta < 0$, $\delta = \pm j\sqrt{-\Delta} \in j\mathbb{R}$, donc $x_{\pm} = \frac{-b \pm j\sqrt{-\Delta}}{2a}$ sont deux racines complexes conjuguées.

2.1.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe

L'analogie de l'écriture $z = a(1, 0) + b(0, 1)$ avec l'écriture vectorielle $\overrightarrow{OM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ suggère d'associer au nombre complexe $z = (a, b)$ le point $M(a, b)$ du plan rapporté au repère orthonormé $(0, \vec{u}, \vec{v})$. On dit alors que M est l'image de z , ou que z est l'afixe de M .

Remarque 2.1.1

- Si $z \in \mathbb{R}$ (z est réel) alors $M \in (Ox)$. Par contre, si $z \in j\mathbb{R}$ (z est imaginaire pur), on a $M \in (Oy)$;
- Le conjugué \bar{z} de z a pour image le symétrique de M par rapport à (Ox) .

Image de $z + z'$

Soient $z = a + jb$ et $z' = a' + jb'$ deux nombres complexes d'images respectives M et M' . D'après ce que l'on vient de voir, l'image de $z'' = z + z' = a + a' + j(b + b')$ est le point M'' défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$. On a donc l'équivalence

$$(z'' = z + z') \iff (\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}).$$

En particulier, si $z' = -z$, il découle de l'équivalence précédente que $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.

Conséquence. Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B . Comme

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

l'unique point C tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_C = z_B - z_A$. Ceci nous amène donc à associer le nombre complexe $z_B - z_A$ au vecteur \overrightarrow{AB} .

Application. Trouver l'expression de l'affixe z_C en fonction de z_A et z_B de sorte que $(0ABC)$ soit un parallélogramme.

Image de λz , $\lambda \in \mathbb{R}$

Si $z = a + jb$ on sait que $z' = \lambda z = \lambda a + j(\lambda b)$. L'image de z' est donc le point M' défini par $\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$, soit :

$$(z' = \lambda z) \iff (\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}).$$

2.2 Module et argument d'un nombre complexe

2.2.1 Représentation trigonométrique d'un nombre complexe

Soit M l'image de $z = a + jb$. Par définition, le *module* de z est le nombre réel (positif)

$$|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et, lorsque $z \neq 0$, on appelle *Argument* de z (avec un "A" majuscule), toute mesure en radians (définie à 2π -près) de l'angle $(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OM}})$:

$$\text{Arg } z = \text{mes}(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OM}})$$

Remarque 2.2.1

- $|z| \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
- Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument.
- Lorsque $z \neq 0$, $\text{Arg } z$ est défini à 2π -près : il existe un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\text{Arg } z = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Par commodité, pour tout $z \neq 0$, on appellera *argument* de z (avec un "a" minuscule) cette valeur de θ (appartenant à $[0, 2\pi[$) :

$$\arg z = \theta$$

En résumé, pour tout complexe z non nul, on l'équivalence suivante :

$$\begin{pmatrix} a = r \cos \theta \\ b = r \sin \theta \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \theta = \frac{a}{r} \quad \sin \theta = \frac{b}{r} \end{pmatrix},$$

ce qui fournit l'écriture trigonométrique de z :

$$z = r(\cos \theta + j \sin \theta) \text{ avec } r \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

Remarque 2.2.2 Lorsque $a \neq 0$, on a $\tan \theta = \frac{b}{a}$. Cependant, cette égalité ne détermine θ qu'à π -près (puisque $\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$). Pour déterminer θ , on doit choisir l'angle θ pour lequel $\cos \theta$ a bien le signe de a . En résumé :

$$\begin{pmatrix} a = r \cos \theta \\ b = r \sin \theta \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan \theta = \frac{b}{a} \quad \text{signe}(a) = \text{signe}(\cos \theta) \end{pmatrix}.$$

2.2.2 Module et argument du produit

Soient $z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$ et $z' = r'(\cos \theta' + j \sin \theta')$ deux nombres complexes. Par un calcul simple, on obtient

$$zz' = rr' \left[\underbrace{(\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta')}_{\cos(\theta+\theta')} + j \underbrace{(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')}_{\sin(\theta+\theta')} \right],$$

ce qui entraîne :

$$\begin{cases} |zz'| &= |z| \times |z'| \\ \text{Arg}(zz') &= \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') \end{cases}$$

Conséquences

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$ et $\text{Arg}(z^n) = n\text{Arg}(z)$;
- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{Arg}(z)$.

2.3 Notation exponentielle

2.3.1 Fonction exponentielle complexe

Pour tout nombre complexe $z = a + jb$, on pose :

$$e^z = e^a (\cos b + j \sin b)$$

La fonction suivante, notée \exp , définie par

$$\begin{aligned} \exp : \quad \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z = a + jb &\mapsto e^z, \end{aligned}$$

s'appelle *fonction exponentielle complexe* car c'est une fonction (à valeurs complexes) de la variable complexe z .

Remarque 2.3.1 Avec cette définition :

- Si $z = a \in \mathbb{R}$, on retrouve l'exponentielle réelle : $e^z = e^a$;
- Si $z = jb \in j\mathbb{R}$, on obtient $e^{jb} = \cos b + j \sin b$;
- $|e^z| = e^a$ et $\text{Arg}(e^z) = b + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. En d'autres termes, e^z est le nombre complexe de module e^a dont un argument est b .

2.3.2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Formule de Moivre

En partant de l'écriture trigonométrique de n'importe quel nombre complexe z , $z = r(\cos \theta + j \sin \theta)$, il résulte immédiatement de la définition de l'exponentielle complexe que

$$z = r(\cos \theta + j \sin \theta) = re^{j\theta} \text{ avec } r \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.$$

On dit alors que le nombre complexe z est mis sous *forme exponentielle*.

On a déjà vu que si $z = \cos \theta + j \sin \theta$ et $z' = \cos \theta' + j \sin \theta'$ alors $zz' = \cos(\theta + \theta') + j \sin(\theta + \theta')$. On déduit ainsi de la définition précédente l'égalité suivante :

$$\boxed{e^{j\theta} e^{j\theta'} = e^{j(\theta+\theta')}}$$

En choisissant $\theta' = \theta$, on obtient ainsi $(e^{j\theta})^2 = e^{j2\theta}$, donc, par récurrence immédiate sur l'entier naturel n , on obtient :

$$(e^{j\theta})^n = e^{jn\theta}. \quad (2.2)$$

En prenant ensuite $\theta' = -\theta$ et en remarquant que $e^{j0} = 1$, on obtient

$$\boxed{e^{-j\theta} = \frac{1}{e^{j\theta}} = \overline{e^{j\theta}}}$$

donc, en appliquant la formule (2.2) au réel $-\theta$, il vient

$$\underbrace{(e^{-j\theta})^n}_{\frac{1}{(e^{j\theta})^n}} = e^{-jn\theta},$$

ce qui implique :

$$(e^{j\theta})^{-n} = e^{-jn\theta} = e^{j(-n)\theta}.$$

Par suite, nous avons démontré pour tout nombre réel θ et pour tout entier relatif n que

$$(e^{j\theta})^n = \underbrace{e^{jn\theta}}_{\cos(n\theta) + j \sin(n\theta)},$$

ce qui démontre la *formule de Moivre* :

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (\cos \theta + j \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + j \sin(n\theta) \text{ i.e. } (e^{j\theta})^n = e^{jn\theta}}$$

Application. La formule de Moivre permet d'exprimer $\cos(n\theta)$ en fonction des quantités $\cos^p \theta$ et $\sin^p \theta$ pour $0 \leq p \leq n$ i.e. de puissances de cosinus et de sinus, comme on peut le voir sur cet exemple :

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \operatorname{Re}(e^{j3\theta}) \\ &= \operatorname{Re}(\cos(3\theta) + j \sin(3\theta)) \\ &= \operatorname{Re}((\cos \theta + j \sin \theta)^3) \\ &= \operatorname{Re}(\cos^3 \theta + 3 \cos^2 \theta (j \sin \theta) + 3 \cos \theta (j \sin \theta)^2 + (j \sin \theta)^3) \\ &= \operatorname{Re}(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta + j(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta)) \\ &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Formules d'Euler

En partant de la double égalité

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta,$$

on obtient facilement *les formules d'Euler* suivantes :

$$\boxed{\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \quad \cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}}$$

Application. Les formules d'Euler permettent notamment de *linéariser une expression trigonométrique*, c'est-à-dire d'exprimer $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$ en fonction de $\cos(p\theta)$ et $\sin(p\theta)$ pour $0 \leq p \leq n$. Ainsi, on a par exemple :

$$\begin{aligned} \sin^3 \theta &= \left(\frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j} \right)^3 \\ &= \frac{-1}{8j} (e^{3j\theta} - 3e^{2j\theta}e^{-j\theta} + 3e^{j\theta}e^{-2j\theta} - e^{-3j\theta}) \\ &= \frac{-1}{8j} (e^{3j\theta} - 3e^{j\theta} + 3e^{-j\theta} - e^{-3j\theta}) \\ &= \frac{-1}{8j} \left[\underbrace{e^{3j\theta} - e^{-3j\theta}}_{2j \sin(3\theta)} - 3 \underbrace{(e^{j\theta} - e^{-j\theta})}_{2j \sin \theta} \right] \\ &= -\frac{\sin(3\theta)}{4} + \frac{3 \sin \theta}{4} \end{aligned}$$

2.3.3 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

On appelle *racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité* toute solution de l'équation $z^n = 1$. Soit $z = re^{j\theta}$ une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. On a alors nécessairement :

$$\begin{aligned} (z^n = 1) &\iff (r^n e^{jn\theta} = 1e^{j0}) \\ &\iff \left(\begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \right) \\ &\iff \left(\begin{cases} r = 1 \\ n\theta = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \right) \\ &\iff \left(\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \right) \\ &\iff \omega_k = 1 e^{j\frac{2k\pi}{n}}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont donc :

$$\omega_0 = 1, \omega_1 = e^{j\frac{2\pi}{n}}, \omega_2 = e^{j\frac{4\pi}{n}}, \dots, \omega_k = e^{j\frac{2k\pi}{n}}, \dots, \omega_{n-1} = e^{j\frac{2(n-1)\pi}{n}}, \underbrace{e^{j\frac{2n\pi}{n}}}_{\omega_0}, \underbrace{e^{j\frac{2(n+1)\pi}{n}}}_{\omega_1}, \underbrace{e^{j\frac{2(n+2)\pi}{n}}}_{\omega_2}, \dots$$

On voit ainsi qu'il y a n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité distinctes, à savoir $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}$. Et comme $\omega_k = \omega_1^k$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on a démontré le résultat suivant :

L'équation $z^n = 1$ possède n solutions distinctes, ω_1^k , pour $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, où $\omega_1 = e^{j\frac{2\pi}{n}}$

Exemple. L'équation $z^3 = 1$ possède 3 solutions distinctes (les racines $3^{\text{ièmes}}$ de l'unité) qui sont $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ et $\omega_2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = -e^{j\frac{\pi}{3}}$.

Remarque 2.3.2 Pour tout $n \geq 2$, on a l'égalité :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0}$$

En effet, comme ω_1 est racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, on a

$$\begin{aligned} (\omega_1^n - 1 = 0) &\iff \left(\underbrace{(\omega_1 - 1)}_{\neq 0} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^k \right] = 0 \right) \\ &\iff \left(\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\omega_1^k}_{\omega_k} = 0 \right) \\ &\iff \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0 \right). \end{aligned}$$

2.3.4 Un exemple d'utilisation des nombres complexes en physique

On considère un mouvement sinusoïdal de *pulsation* ω :

$$v(t) = V \cos(\omega t + \varphi).$$

En physique, V s'appelle *l'amplitude* et φ la *phase*. Toutes les quantités introduites (ω , V et φ) sont réelles. On peut alors écrire

$$v(t) = \operatorname{Re} \left(V e^{j(\omega t + \varphi)} \right) = \operatorname{Re} \left(V e^{j\varphi} e^{j\omega t} \right).$$

L'expression $\mathcal{V} = V e^{j\varphi}$ s'appelle *l'amplitude complexe* du signal v .

Maintenant, si l'on considère deux signaux

$$\begin{cases} v_1(t) = V_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = \operatorname{Re} (V_1 e^{j\varphi_1} e^{j\omega t}) \\ v_2(t) = V_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = \operatorname{Re} (V_2 e^{j\varphi_2} e^{j\omega t}), \end{cases}$$

de même pulsation ω , leur somme s est :

$$s(t) = \operatorname{Re} \left((V_1 e^{j\varphi_1} + V_2 e^{j\varphi_2}) e^{j\omega t} \right).$$

Il s'agit donc à nouveau d'un signal sinusoïdal de pulsation ω , dont l'amplitude complexe est la somme des deux amplitudes complexes de chacun des signaux v_1 et v_2 .

Dans le cas particulier où $V_1 = V_2 = V$, on a de plus :

$$V_1 e^{j\varphi_1} + V_2 e^{j\varphi_2} = V e^{j \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}} \underbrace{\left(e^{j \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}} + e^{j \frac{-\varphi_1 + \varphi_2}{2}} \right)}_{2 \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)} = 2V \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) e^{j \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}},$$

ce qui permet d'établir avec très peu de calculs que :

- l'amplitude de s est $2V \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$
- la phase de s est $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$.

Chapitre 3

Polynômes

Dans tout ce chapitre, K désigne soit \mathbb{R} , soit \mathbb{C} .

On considère ici des *polynômes à coefficients dans K de la variable $x \in K$* :

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p, \quad a_k \in K \text{ pour } 0 \leq k \leq p.$$

Si $a_p \neq 0$, p est le *degré* du polynôme P , noté $\deg P$. Un polynôme à coefficients dans K est donc une suite de termes appartenant à K , qui sont tous nuls à partir d'un certain rang :

$$P = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_p, 0, 0, \dots),$$

ce que l'on note plus économiquement $P = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en gardant à l'esprit que $a_k = 0$ pour tout $k \geq p + 1$. On note $K[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients dans K de la variable $x \in K$.

3.1 Opérations sur les polynômes

Soient deux polynômes $P = (a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $Q = (b_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

3.1.1 Addition et produit par un nombre appartenant à K

Par définition, le polynôme somme est $P + Q = (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $c_k = a_k + b_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Conséquence. Notons $p = \deg P$ et $q = \deg Q$, de sorte que $P = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_p, 0, 0, \dots)$ avec $a_p \neq 0$ et $Q = (b_0, b_1, b_2, \dots, b_q, 0, 0, \dots)$ avec $b_q \neq 0$. On voit facilement que :

- si $p \neq q$, $\deg(P + Q) = \max(\deg P, \deg Q)$;
- si $p = q$, $\deg(P + Q) \leq p$.

Ceci implique :

$$\boxed{\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)}$$

Remarque 3.1.1 (*Cas du polynôme nul*). Dans l'inégalité précédente on a supposé que $p \geq 0$ et $q \geq 0$, c'est-à-dire que P et Q sont différents du polynôme nul (polynôme dont tous les coefficients sont nuls), noté $\underline{0}$. Néanmoins, en posant $\deg \underline{0} = -\infty$ et en convenant que $-\infty \leq k$ et $-\infty \pm k = -\infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'inégalité précédente reste valable lorsque l'un des polynômes P ou Q est égal à $\underline{0}$.

Ensuite, pour tout $\lambda \in K$, on définit le polynôme λP en posant : $\lambda P = (\lambda a_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Remarque 3.1.2 L'égalité entre les polynômes P et Q se définit :

— en tant que suites de termes appartenant à K par l'égalité des coefficients :

$$(P = Q) \iff (a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_p = b_p)$$

— en tant que fonctions par

$$(P = Q) \iff (P(x) = Q(x), \forall x \in K).$$

On admettra que ces deux points de vue sont équivalents.

3.1.2 Produit de deux polynômes

Par définition, le polynôme produit de P par Q est

$$PQ = (c_k)_{k \in \mathbb{N}}, \text{ avec } c_k = \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

En clair, on a :

$$c_0 = a_0 b_0, c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \dots, c_{p+q} = a_p b_q \quad (3.1)$$

Comme $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$, on a donc $c_{p+q} \neq 0$. Par ailleurs il est clair que $c_n = 0$ dès que $n > p + q$, ce qui prouve :

$$\boxed{\deg(PQ) = \deg P + \deg Q}$$

On vérifie alors à l'aide de cette égalité que :

$$(PQ = \underline{0}) \iff (P = \underline{0} \text{ ou } Q = \underline{0}).$$

Remarque 3.1.3 Il résulte de la définition (3.1) des coefficients du polynôme PQ que la multiplication polynomiale est commutative :

$$PQ = QP.$$

Remarque 3.1.4 Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, posons :

$$E_k = (\delta_{jk})_{j \in \mathbb{N}} \text{ où } \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En clair :

$$E_0 = (1, 0, 0, \dots), E_1 = (0, 1, 0, 0, \dots), E_2 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots), \text{ etc...}$$

Compte tenu de la définition du produit de deux polynômes, on peut écrire :

$$E_p = E_1^p \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, comme tout polynôme $P = (a_0, a_1, \dots, a_p, 0, 0, \dots)$ s'écrit également

$$P = a_0 E_0 + a_1 E_1 + a_2 E_2 + \dots + a_p E_p,$$

on obtient, en posant préalablement $X = E_1$ (ce symbole X s'appelle l'indéterminée) que $P = a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + \dots + a_pX^p$, ce que l'on note usuellement :

$$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_pX^p.$$

La fonction de K à valeurs dans K , $x \mapsto \tilde{P}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_px^p$ (obtenue en remplaçant l'indéterminée X -qui est en fait un polynôme- par l'élément x de K dans l'expression de P) s'appelle la fonction polynôme associée à P . Vu la remarque 3.1.2, il n'y a pas lieu de faire la distinction entre le polynôme P et sa fonction polynôme associée \tilde{P} , que l'on notera également P désormais.

3.2 Division des polynômes

3.2.1 Division euclidienne

Etant donnés deux polynômes A et B avec $B \neq 0$, on démontre (on l'admet dans ce cours) qu'il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que les deux conditions suivantes soient satisfaites simultanément :

$$\begin{cases} (i) & A = BQ + R \\ (ii) & \deg R < \deg B. \end{cases}$$

Les polynômes B , Q et R s'appellent respectivement le *diviseur*, le *quotient* et le *reste* de la *division euclidienne* de A par B . Le résultat précédent sera généralement appelé *théorème de division euclidienne* dans la suite de l'année.

On dit que B *divise* A ou que B *est un diviseur de* A ou bien encore que A *est divisible par* B , si le reste R de la division euclidienne de A par B est le polynôme nul : $R = \underline{0}$.

Exemple. On prend $A = X^3 - 2X^2 + 1$ et $B = X^2 - X + 2$.

Cas particulier : division par $X - a$, $a \in K$

L'égalité de division euclidienne de P par $X - a$ s'écrit

$$P = (X - a)Q + R \text{ avec } \deg R < 1. \quad (3.2)$$

Par suite, $\deg R \leq 0$ donc R est un polynôme constant (éventuellement nul). Comme l'égalité (3.2) est valable pour tout $x \in K$, elle est vraie en particulier si $x = a$, ce qui implique $R = P(a)$. Par suite :

$$\boxed{(P \text{ est divisible par } X - a) \iff (P(a) = 0)} \quad (3.3)$$

Généralisation. Pour $a \neq b$, on démontre (c'est un bon exercice) que :

$$(P \text{ est divisible par } (X - a)(X - b)) \iff (P(a) = P(b) = 0). \quad (3.4)$$

3.2.2 Division selon les puissances croissantes

Si A et B sont deux polynômes tels que $B(0) \neq 0$, on admettra qu'il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que

$$\begin{cases} (i) & A = BQ + X^{n+1}R \\ (ii) & \deg Q \leq n. \end{cases}$$

Les polynômes Q et R s'appellent respectivement le *quotient* et le *reste* de la *division suivant les puissances croissantes de A par B à l'ordre n* .

Dans la pratique, les polynômes Q et R sont obtenus en ordonnant A et B en puissances croissantes et en procédant par divisions successives jusqu'à ce que l'on puisse mettre X^{n+1} en facteur dans le reste. Il est donc nécessaire de préciser à quel ordre la division doit être effectuée.

Exemple. Division à l'ordre 2 de $A = 1 + X - 3X^3$ par $B = 1 + X^2$.

3.3 Zéro d'un polynôme

3.3.1 Formule de Taylor

Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_pX^p \in \mathbb{R}_p[X]$, on sait (c'est un résultat que l'on démontrera dans le cours d'algèbre linéaire en fin d'année) qu'il existe un unique $(p+1)$ -uplet $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$ de réels tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + \alpha_2(x-a)^2 + \dots + \alpha_p(x-a)^p.$$

Par dérivations successives, il vient alors :

$$\begin{cases} P'(x) &= \alpha_1 + 2\alpha_2(x-a) + 3\alpha_3(x-a)^2 \dots + p\alpha_p(x-a)^{p-1} \\ P''(x) &= 2\alpha_2 + 6\alpha_3(x-a) + \dots + p(p-1)\alpha_p(x-a)^{p-2} \\ \vdots & \vdots \\ P^{(p)}(x) &= p(p-1)(p-2) \dots [p-(p-1)]\alpha_p(x-a)^{p-p} = p!\alpha_p. \end{cases}$$

Ceci implique immédiatement :

$$\alpha_0 = P(a), \alpha_1 = P'(a), \alpha_2 = \frac{P''(a)}{2!}, \dots, \alpha_p = \frac{P^{(p)}(a)}{p!}.$$

D'où la *formule de Taylor* :

$$P(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{P^{(p)}(a)}{p!}(x-a)^p, \forall x \in \mathbb{R}$$

Exemple. Considérons le polynôme P tel que $P = X^2 + X + 1$. Ecrire la formule de Taylor de P .

3.3.2 Racine et multiplicité

Soit P un polynôme à coefficients dans K .

On dit que a est *racine (ou zéro)* de P si P s'annule au point a : $P(a) = 0$. D'après l'équivalence (3.3), on peut donc dire que a est racine de P si $X - a$ divise P , c'est-à-dire s'il existe un polynôme Q tel que $P = (X - a)Q$.

On peut ensuite se poser la question de savoir si a est racine du polynôme Q . Si tel est le cas, $X - a$ divise Q , donc il existe un polynôme R tel que $Q = (X - a)R$, ce qui entraîne finalement $P = (X - a)^2 R$.

Ainsi, lorsque l'on est en présence d'un zéro, a , de P , il est naturel d'essayer de connaître la "plus grande puissance de $X - a$ " qui divise P . Compte tenu de cette remarque, on dira que a est *racine (ou zéro)* de *multiplicité* m ($m \geq 1$) du polynôme P , si l'on peut mettre P sous la forme

$$P = (X - a)^m Q \text{ avec } Q(a) \neq 0.$$

L'entier $m \geq 1$ s'appelle *l'ordre de multiplicité* (ou plus simplement *la multiplicité* ou encore *l'ordre*) de a en tant que zéro de P . La condition $Q(a) \neq 0$ signifiant en vertu de (3.3) que Q n'est pas divisible par $X - a$, on a donc immédiatement l'équivalence suivante :

$$(a \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } m) \iff \left(\begin{array}{l} (i) \quad (X - a)^m \text{ divise } P \\ (ii) \quad (X - a)^{m+1} \text{ ne divise pas } P. \end{array} \right)$$

Quoiqu'il en soit, le degré du polynôme P étant toujours noté p , la formule de Taylor permet d'écrire

$$\begin{aligned} P(x) &= P(a) + P'(a)(x - a) + \frac{P''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{P^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}(x - a)^{m-1} \\ &+ (x - a)^m \left[\frac{P^{(m)}(a)}{m!} + \frac{P^{(m+1)}(a)}{(m+1)!}(x - a) + \dots + \frac{P^{(p)}(a)}{p!}(x - a)^{p-m} \right], \end{aligned}$$

on a donc l'équivalence

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{l} (i) \quad P(x) = (x - a)^m Q(x) \\ (ii) \quad Q(a) \neq 0 \end{array} \right) \\ \iff &\left(\begin{array}{l} (i') \quad \forall x \in K, P(a) + P'(a)(x - a) + \frac{P''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{P^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}(x - a)^{m-1} = 0 \\ (ii') \quad \frac{P^{(m)}(a)}{m!} \neq 0, \end{array} \right), \end{aligned}$$

ce qui entraîne finalement :

$$\boxed{(a \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } m) \iff \left(\begin{array}{l} (i) \quad P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \\ (ii) \quad P^{(m)}(a) \neq 0. \end{array} \right)} \quad (3.5)$$

3.4 Factorisation des polynômes

3.4.1 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Elle repose essentiellement sur le résultat (admis) suivant :

Théorème 3.4.1 (*Théorème de d'Alembert*). *Tout polynôme de degré p non nul possède exactement p zéros (distincts ou confondus) dans \mathbb{C} .*

Lorsque certains de ces zéros sont confondus, on a seulement $n < p$ zéros distincts z_1, z_2, \dots, z_n . En notant m_i la multiplicité de z_i en tant que zéro de $P = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$ pour tout i de 1 à n , on a alors :

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = p.$$

L'équivalence (3.4) permet alors d'écrire :

$$P = a_p(X - z_1)^{m_1}(X - z_2)^{m_2} \dots (X - z_n)^{m_n}$$

Lorsque P est écrit sous cette forme, on dit qu'il est *décomposé en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$* , ou plus simplement *factorisé dans $\mathbb{C}[X]$* . Comme tous les polynômes de cette factorisation sont de degrés au plus 1, on dit que P est *scindé* dans \mathbb{C} .

3.4.2 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Supposons maintenant que $P = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$ est un polynôme à coefficients réels. C'est donc *a fortiori* un polynôme à coefficients complexes, que l'on peut le décomposer en produit de facteurs irréductibles dans \mathbb{C} , comme on vient de le voir au §3.4.1 :

$$P = a_p(X - z_1)^{m_1}(X - z_2)^{m_2} \dots (X - z_n)^{m_n}.$$

Mais, même si P est à coefficients réels, certains zéros de P sont éventuellement complexes non réels. Quitte à réindexer la liste z_1, z_2, \dots, z_n , on peut supposer qu'il existe un entier $k \leq n$ tel que que z_1, z_2, \dots, z_k sont réels et $z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_n$ sont complexes non réels. Afin d'améliorer les notations, on notera désormais x_i plutôt que z_i , $1 \leq i \leq k$, les zéros réels de P .

Maintenant, si z est un zéro complexe non réel de $P = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$, on a

$$P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_pz^p = 0,$$

et, le conjugué $\overline{P(z)}$ de $P(z)$, qui est également nul, s'écrit :

$$\begin{aligned} \overline{P(z)} &= \overline{a_0 + a_1z + \dots + a_pz^p} \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1z} + \dots + \overline{a_pz^p} \\ &= a_0 + a_1\bar{z} + \dots + a_p\bar{z}^p \\ &= P(\bar{z}), \end{aligned}$$

car tous les coefficients a_i , $0 \leq i \leq p$, sont réels. Ceci montre que \bar{z} est donc également zéro de P . On peut même montrer que si z est zéro complexe non réel de P de multiplicité m , alors la multiplicité de \bar{z} en tant que

zéro (complexe non réel) de P est également m . Ainsi, la liste $z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_n$ des zéros complexes non réels de P se met également sous la forme

$$\{z_{k+1}, z_{k+2}, \dots, z_n\} = \{\alpha_1, \overline{\alpha_1}, \alpha_2, \overline{\alpha_2}, \dots, \alpha_d, \overline{\alpha_d}\},$$

avec évidemment $2d = n - k$. Pour tout j de 1 à d , chacun des α_j et $\overline{\alpha_j}$ est donc un zéro complexe non réel de P de même multiplicité β_j . Avec ces nouvelles notations, la factorisation de P dans \mathbb{C} devient alors :

$$P = a_p(X-x_1)^{m_1}(X-x_2)^{m_2} \dots (X-x_k)^{m_k} [(X-\alpha_1)(X-\overline{\alpha_1})]^{\beta_1} [(X-\alpha_2)(X-\overline{\alpha_2})]^{\beta_2} \dots [(X-\alpha_d)(X-\overline{\alpha_d})]^{\beta_d}.$$

Maintenant, si l'on convient de poser $\alpha_r = u_r + jv_r$ pour tout r de 1 à d , l'égalité

$$(X - \alpha_r)(X - \overline{\alpha_r}) = (X - u_r)^2 + v_r^2,$$

donne :

$$P = a_p(X - x_1)^{m_1}(X - x_2)^{m_2} \dots (X - x_k)^{m_k} [(X - u_1)^2 + v_1^2]^{\beta_1} [(X - u_2)^2 + v_2^2]^{\beta_2} \dots [(X - u_d)^2 + v_d^2]^{\beta_d}$$

Cette fois, P est écrit comme produit de polynômes de $\mathbb{R}[X]$. On dit alors qu'il est *décomposé en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$* ou plus simplement *factorisé dans $\mathbb{R}[X]$* .

Chapitre 4

Décomposition des fractions rationnelles

Dans tout ce chapitre, K désigne soit \mathbb{R} , soit \mathbb{C} .

4.1 Généralités

4.1.1 Définition

Une *fraction rationnelle* F est un couple de polynômes $(P, Q) \in (K[X])^2$ dans lequel $Q \neq 0$, et que l'on note aussi $F = \frac{P}{Q}$.

Dans cette écriture, P s'appelle le polynôme *numérateur* et Q le polynôme *dénominateur*.

On note $K(X)$, l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans K de la variable $x \in K$.

4.1.2 Représentation des fractions rationnelles

Egalité entre fractions rationnelles

Pour tous polynômes P_1, P_2, Q_1 et Q_2 , l'égalité entre les fractions rationnelles $\frac{P_1}{Q_1}$ et $\frac{P_2}{Q_2}$ est définie par l'équivalence :

$$\left(\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} \right) \iff (P_1 Q_2 = P_2 Q_1).$$

Les couples (P_1, Q_1) et (P_2, Q_2) satisfaisant $P_1 Q_2 = P_2 Q_1$ représentent donc ici la même fraction rationnelle.

Ainsi, pour toute fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$ dont les polynômes numérateur, P , et dénominateur, Q , possèdent un diviseur commun S (de degré ≥ 1), on a

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1} \text{ avec } \deg P_1 < \deg P \text{ et } \deg Q_1 < \deg Q,$$

puisque $P = SP_1$ et $Q = SQ_1$. Comme on est passé de $F = \frac{P}{Q}$ à $F = \frac{P_1}{Q_1}$ par "simplification simultanée en haut et en bas" par un même polynôme (de degré ≥ 1), on a "réduit" la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ en $\frac{P_1}{Q_1}$ (car $\deg P_1 < \deg P$ et $\deg Q_1 < \deg Q$). Ceci montre que pour obtenir la "meilleure représentation" possible de

$F = \frac{P}{Q}$, il faut "simplifier simultanément la fraction en haut et en bas" par le *plus grand diviseur commun* (pgcd en abrégé) des polynômes P et Q (c'est-à-dire le diviseur commun de P et Q dont le degré est maximum), qui est traditionnellement noté $P \wedge Q$.

Lorsque $P \wedge Q = 1$, les polynômes P et Q n'ont que les polynômes constants comme diviseurs communs et l'on dit alors qu'ils sont *premiers entre eux*. Toute fraction rationnelle représentée par un couple (P, Q) de polynômes premiers entre eux est alors dite *irréductible*. La terminologie employée exprime bien que cette représentation n'est plus "simplifiable" (en ce sens qu'elle ne peut plus être "réduite" par la division du numérateur et du dénominateur par un même polynôme de degré ≥ 1). Dans ce cas, toute représentation équivalente de la fraction rationnelle de départ fera intervenir un numérateur (resp. un dénominateur) de degré au moins égal à $\deg P$ (resp. à $\deg Q$).

Proposition 4.1.1 *Toute fraction rationnelle F possède un représentant irréductible.*

Preuve

Soient $F = \frac{P}{Q}$ et $D = P \wedge Q$. Il existe donc deux polynômes premiers entre eux, P_1 et Q_1 , tels que $P = DP_1$ et $Q = DQ_1$. On a donc

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{DP_1}{DQ_1} = \frac{P_1}{Q_1},$$

ce qui montre que (P_1, Q_1) est un représentant irréductible de F . ■

On remarque que cette démonstration fournit une méthode de calcul d'un représentant irréductible de F , pour peu que l'on sache calculer pratiquement $P \wedge Q$.

Calcul pratique du pgcd de deux polynômes : algorithme d'Euclide

Ce calcul repose sur *l'algorithme d'Euclide*, dont le principe va être exposé dans ce qui suit. Soient A et B deux polynômes, $B \neq 0$, pour lesquels on cherche à déterminer $D = A \wedge B$.

Posons maintenant $R_0 = A$ et $R_1 = B$, puis effectuons la division euclidienne de R_0 par R_1 :

$$\exists!(Q_1, R_2) \in (K[X])^2, \begin{cases} R_0 = R_1Q_1 + R_2 \\ \deg R_2 < \deg R_1. \end{cases}$$

On a alors l'alternative suivante :

- $R_2 = 0$, ce qui implique que R_1 divise R_0 et donc que $D = R_0 \wedge R_1 = R_1$, ceci terminant le calcul.
- $R_2 \neq 0$: dans ce cas, l'égalité $R_0 = R_1Q_1 + R_2$ impose $R_0 \wedge R_1 = R_1 \wedge R_2$. Autrement dit, le calcul de D se ramène à celui du pgcd de R_1 et R_2 . On peut alors poursuivre le processus initié par R_0 et R_1 :

$$\exists!(Q_2, R_3) \in (K[X])^2, \begin{cases} R_1 = R_2Q_2 + R_3 \\ \deg R_3 < \deg R_2. \end{cases}$$

Et on a alors une nouvelle alternative :

- $R_3 = 0$, ce qui implique que R_2 divise R_1 et donc que $D = R_1 \wedge R_2 = R_2$, ceci achevant le calcul.
- $R_3 \neq 0$: dans ce cas, l'égalité $R_1 = R_2Q_2 + R_3$ impose $R_1 \wedge R_2 = R_2 \wedge R_3$, ce qui ramène le calcul de D à celui du pgcd de R_2 et R_3 puisque $D = R_0 \wedge R_1 = R_1 \wedge R_2 = R_2 \wedge R_3$. On poursuit ensuite le processus de division euclidienne, comme cela a été fait plus haut.

On obtient donc finalement une suite de "polynômes restes", $(R_1, R_2, R_3, \dots, R_k, \dots)$, dont les degrés successifs décroissent strictement :

$$\deg R_1 > \deg R_2 > \dots > \deg R_k > \dots$$

Il existe donc forcément un indice $k_0 \geq 2$ tel que

$$R_{k_0} = \underline{0} \text{ et } R_{k_0-1} \neq \underline{0}.$$

Ceci entraîne alors évidemment $R_{k_0-1} \wedge R_{k_0} = R_{k_0-1}$, et comme on a vu que

$$D = R_0 \wedge R_1 = R_1 \wedge R_2 = R_2 \wedge R_3 = \dots = R_{k_0-2} \wedge R_{k_0-1},$$

il résulte en définitive de tout ceci que

$$\boxed{A \wedge B \text{ est le dernier polynôme non nul de la suite } (R_1, R_2, \dots)}$$

Exemple. On prend $A = X^5 - X^4 + 2X^3 + 1$ et $B = X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$. Calculer $A \wedge B$.

Dans la suite de ce chapitre, toutes les fractions considérées seront supposées irréductibles.

4.1.3 Partie entière et pôles d'une fraction rationnelle

Partie entière

Proposition 4.1.2 *A toute fraction rationnelle $F = \frac{P}{Q}$, on peut associer un unique couple de polynômes (E, R) tel que :*

$$\begin{cases} (i) & F = \frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q} \\ (ii) & \deg R < \deg Q. \end{cases}$$

Preuve

D'après le théorème de division euclidienne, il existe un unique couple de polynômes (E, R) satisfaisant

$$\begin{cases} (i') & P = QE + R \\ (ii') & \deg R < \deg Q. \end{cases}$$

D'où le résultat. ■

Le polynôme E s'appelle la *partie entière* de F .

Si $\deg P < \deg Q$, on voit que $E = \underline{0}$ et $R = P$. Par contre, si $\deg P \geq \deg Q$, alors E est de degré $\deg P - \deg Q$.

Les propositions 4.1.1 et 4.1.2 nous disent en fait qu'il suffira, dans la suite, de savoir décomposer les fractions irréductibles $F = \frac{P}{Q}$ telles que $\deg P < \deg Q$.

Pôles et zéros

Les pôles de $F = \frac{P}{Q}$ sont les zéros du polynôme dénominateur Q .

Les zéros du polynôme numérateur P , eux, sont appelés zéros de F .

Proposition 4.1.3 *Les pôles et zéros d'une fraction rationnelle irréductible F sont distincts.*

Preuve

Raisonnons par l'absurde et supposons que a est à la fois un pôle et un zéro de F . Alors, $X - a$ divise P et Q en même temps. Ce qui contredit le fait que F est irréductible. ■

L'ordre de multiplicité d'un pôle de F est celui du zéro correspondant de Q . Si a est pôle d'ordre m de F , il existe donc un polynôme Q_1 tel que $Q = (X - a)^m Q_1$ avec $Q_1(a) \neq 0$, et donc :

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X - a)^m Q_1}.$$

4.2 Décomposition

4.2.1 Décomposition de $\frac{P}{Q_1 Q_2 \dots Q_n}$

On admet les théorèmes suivants, qui permettront de décomposer les fractions du type $\frac{P}{Q_1 Q_2 \dots Q_n}$.

1^{er} cas : Q_1, Q_2, \dots, Q_n sont deux à deux premiers entre eux

Théorème 4.2.1 *Si $\deg P < \deg(Q_1 Q_2 \dots Q_n)$, il existe un unique système de n polynômes (P_1, P_2, \dots, P_n) tels que :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \frac{P}{Q_1 Q_2 \dots Q_n} = \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{Q_i} \\ (ii) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \deg P_i < \deg Q_i. \end{array} \right.$$

2^{ème} cas : $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n = Q$

Théorème 4.2.2 *Si $\deg P < \deg(Q^n)$, il existe un unique système de n polynômes (P_1, P_2, \dots, P_n) tels que*

$$\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \frac{P}{Q^n} = \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{Q^i} \\ (ii) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \deg P_i < \deg Q. \end{array} \right.$$

4.2.2 Décomposition dans \mathbb{C}

Soit $F = \frac{P}{Q}$, les polynômes P et Q appartenant à $\mathbb{C}[X]$ et Q étant supposé *normalisé* (c'est-à-dire que le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1).

D'après le théorème de d'Alembert, tout polynôme non nul de Q de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur \mathbb{C} . Autrement dit, si l'on note a_1, a_2, \dots, a_n les pôles deux à deux distincts de F et m_i l'ordre de multiplicité de a_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$Q = (X - a_1)^{m_1} (X - a_2)^{m_2} \dots (X - a_n)^{m_n} = \prod_{i=1}^n \underbrace{(X - a_i)^{m_i}}_{Q_i}.$$

Pour tout i et j dans $\{1, 2, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$,

$$(a_i \neq a_j) \implies (Q_i \text{ et } Q_j \text{ sont premiers entre eux}).$$

Ainsi, comme les a_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sont deux à deux distincts, les Q_i sont deux à deux premiers entre eux. La proposition 4.1.1 et le théorème 4.2.1 permettent donc d'affirmer qu'il existe un polynôme E de degré $\deg P - \deg Q$ et des complexes $b_{i,j}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $j \in \{1, 2, \dots, m_i\}$, tels que

$$F = E + \sum_{i=1}^n \underbrace{\left(\frac{b_{i,1}}{(X - a_i)} + \frac{b_{i,2}}{(X - a_i)^2} + \dots + \frac{b_{i,m_i}}{(X - a_i)^{m_i}} \right)}_{\sum_{j=1}^{m_i} \frac{b_{i,j}}{(X - a_i)^j}}.$$

Remarque 4.2.1 (Esquisse du calcul du coefficient d'un pôle d'ordre 1). Si a est un pôle simple de F alors

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x - a)Q_1(x)}, \text{ avec } Q_1(a) \neq 0.$$

On déduit alors du théorème 4.2.1 l'existence d'un nombre complexe A et d'un polynôme P_1 tels que

$$F(x) = \frac{P(x)}{(x - a)Q_1(x)} = \frac{A}{x - a} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}.$$

En multipliant par $(x - a)$, il vient alors :

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)} = A + \frac{(x - a)P_1(x)}{Q_1(x)},$$

d'où

$$A = \frac{P(a)}{Q_1(a)} = [(x - a)F(x)]_{x=a}.$$

4.2.3 Décomposition dans \mathbb{R}

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fraction à coefficients réels. On a vu dans le cours sur les polynômes qu'elle admet des pôles réels a_1, a_2, \dots, a_r d'ordres respectifs m_1, m_2, \dots, m_r , et des pôles complexes non réels deux à deux conjugués $p_1 \pm jq_1, p_2 \pm jq_2, \dots, p_s \pm jq_s$, d'ordres respectifs n_1, n_2, \dots, n_s . Le polynôme Q (toujours supposé normalisé) se décompose alors sous la forme :

$$Q = \prod_{i=1}^r (X - a_i)^{m_i} \prod_{j=1}^s [(X - p_j)^2 + q_j^2]^{n_j}.$$

Tous les polynômes de cette factorisation sont premiers entre eux : les théorèmes 4.2.1 et 4.2.2 s'appliquent et permettent d'écrire la décomposition de F dans \mathbb{R} :

$$F = E + \sum_{i=1}^r \left(\sum_{\alpha=1}^{m_i} \frac{A_{i,\alpha}}{(X - a_i)^\alpha} \right) + \sum_{j=1}^s \left(\sum_{\beta=1}^{n_j} \frac{B_{j,\beta} X + C_{j,\beta}}{[(X - p_j)^2 + q_j^2]^\beta} \right),$$

où E est la partie entière de F et les $A_{i,\alpha}$, $B_{j,\beta}$ et $C_{j,\beta}$ sont des réels.

Exemple. Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ de la fraction rationnelle $F = \frac{X^5 + 4X^2 - 3X + 4}{X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1}$.

Une correction La décomposition d'une fraction rationnelle dans $\mathbb{R}[X]$ s'effectue en plusieurs étapes. Déterminer la partie entière E de F .

Effectuons la division euclidienne de $X^5 + 4X^2 - 3X + 4$ par $X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$.

$$\begin{array}{r} X^5 \qquad \qquad \qquad +4X^2 - 3X + 4 \qquad \qquad X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1 \\ -(X^5 \quad -2X^4 \quad +2X^3 \quad -2X^2 \quad +X) \qquad \qquad X \qquad +2 \\ \hline \qquad 2X^4 \quad -2X^3 \quad +6X^2 \quad -4X \quad +4 \\ \qquad -(2X^4 \quad -4X^3 \quad +4X^2 \quad -4X \quad +2) \\ \hline \qquad \qquad 2X^3 \quad +2X^2 \qquad \qquad +2 \end{array}$$

La partie entière E de la fraction rationnelle F est $X + 2$.

Par ailleurs, nous en déduisons que

$$F = \frac{X^5 + 4X^2 - 3X + 4}{X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1} = X + 2 + \frac{2X^3 + 2X^2 + 2}{X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1} \bullet$$

Factoriser en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, le polynôme $Q = X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$.

Première méthode :

Comme $Q(1) = 1^4 - 2(1)^3 + 2(1)^2 - 2(1) + 1 = 0$,

$Q'(1) = 4(1)^3 - 6(1)^2 + 4(1) - 2 = 0$ et $Q''(1) = 12(1)^2 - 12(1) + 4 = 4 \neq 0$ alors 1 est une racine double de Q . Le polynôme Q se factorise par $(X - 1)^2$. Plus précisément, par identification ou par division euclidienne, nous obtenons $Q = (X - 1)^2 (X^2 + 1)$.

Comme l'équation du second degré à coefficients réels $x^2 + 1 = 0$ est à discriminant strictement négatif, nous en déduisons que la factorisation en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ de Q est

$$Q = (X - 1)^2 (X^2 + 1) \bullet$$

Deuxième méthode :

Notons Q ce polynôme. Comme $Q(1) = 1^4 - 2(1)^3 + 2(1)^2 - 2(1) + 1 = 0$,

$Q'(1) = 4(1)^3 - 6(1)^2 + 4(1) - 2 = 0$ et $Q''(1) = 12(1)^2 - 12(1) + 4 = 4 \neq 0$ alors 1 est une racine double de Q .

Par ailleurs, $Q(j) = (j)^4 - 2(j)^3 + 2(j)^2 - 2(j) + 1 = 0 + 0j = 0$ et

$Q'(-1) = 4(j)^3 - 6(j)^2 + 4(j) - 2 = 4 \neq 0$, alors j est une racine simple de Q . Comme $Q \in \mathbb{R}[X]$, nous savons que $\bar{j} = -j$ est également une racine simple de Q . Ayant les quatre racines de Q , nous en déduisons que la factorisation de Q en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ est $Q = (X - 1)^2 (X - j) (X + j)$.

A partir de la factorisation en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ obtenue ci-dessus, nous en déduisons la factorisation en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ de Q . Nous avons

$$Q = (X - 1)^2 (X^2 + 1). \bullet$$

Déterminer la forme générale de la décomposition dans \mathbb{C} de la fraction rationnelle F .

La forme générale de la décomposition dans \mathbb{R} de F :

De $F = X + 2 + \frac{2X^3 + 2X^2 + 2}{(X - 1)^2 (X^2 + 1)}$, nous en déduisons que la forme générale de la décomposition dans \mathbb{R} de F est

$$F = X + 2 + \frac{a_1}{X - 1} + \frac{a_2}{(X - 1)^2} + \frac{bX + c}{X^2 + 1} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

avec a_1, a_2, b et c , 4 nombres réels uniques dont on cherchera les valeurs pour expliciter la décomposition dans \mathbb{R} • .

Décomposition dans \mathbb{R} de la fraction rationnelle F .

Attention : Le détail du calcul de chaque coefficient est attendu.

Calcul des coefficients :

Calcul de a_2 .

Première approche : Calcul direct

De $F = \frac{X^5 + 4X^2 - 3X + 4}{(X - 1)^2 (X^2 + 1)} = X + 2 + \frac{a_1}{X - 1} + \frac{a_2}{(X - 1)^2} + \frac{bX + c}{X^2 + 1}$, sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, nous en déduisons que

$$(X - 1)^2 F = (X - 1)^2 \left[X + 2 + \frac{a_1}{X - 1} + \frac{a_2}{(X - 1)^2} + \frac{bX + c}{X^2 + 1} \right], \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Il suit que $\frac{X^5 + 4X^2 - 3X + 4}{X^2 + 1} = a_2 + (X - 1) \left[a_1 + (X - 1) \left[X + 2 + \frac{bX + c}{X^2 + 1} \right] \right]$ sur \mathbb{R} .

i.e. $\frac{x^5 + 4x^2 - 3x + 4}{x^2 + 1} = a_2 + (x - 1) \left[a_1 + (x - 1) \left[x + 2 + \frac{bx + c}{x^2 + 1} \right] \right]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x = 1$, nous en déduisons que $a_2 = \frac{(1)^5 + 4(1)^2 - 3(1) + 4}{(1)^2 + 1} = \frac{6}{2}$ d'où $a_2 = 3$. •

Deuxième approche : Calcul direct bis variante

De $\frac{2X^3 + 2X^2 + 2}{(X - 1)^2 (X^2 + 1)} = \frac{a_1}{X - 1} + \frac{a_2}{(X - 1)^2} + \frac{bX + c}{X^2 + 1}$, sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, nous en déduisons que

$$(X-1)^2 \frac{2X^3 + 2X^2 + 2}{(X-1)^2 (X^2 + 1)} = (X-1)^2 \left[\frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{bX+c}{X^2+1} \right], \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Il suit que $\frac{2X^3 + 2X^2 + 2}{X^2 + 1} = a_2 + (X-1) \left[a_1 + (X-1) \left[\frac{bX+c}{X^2+1} \right] \right]$ sur \mathbb{R} .

i.e. $\frac{2x^3 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1} = a_2 + (x-1) \left[a_1 + (x-1) \left[\frac{bx+c}{x^2+1} \right] \right]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour $x = 1$, nous en déduisons que $a_2 = \frac{2(1)^3 + 2(1)^2 + 2}{(1)^2 + 1} = \frac{6}{2}$ d'où $a_2 = 3$.

Pour la suite, notons f la fraction rationnelle $f = \frac{2X^3 + 2X^2 + 2}{(X-1)^2(X^2+1)}$.

Calcul de a_1 (Esquisse) : calcul direct

De $(x-1)^2 f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1} = a_2 + (x-1) \left[a_1 + (x-1) \left[\frac{bx+c}{x^2+1} \right] \right]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, il suit en dérivant sur \mathbb{R} que

$$\left((x-1)^2 f(x) \right)' = \left(\frac{2x^3 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1} \right)' = a_1 + (x-1) \left[\frac{bx+c}{x^2+1} + \left[\left(\frac{bx+c}{x^2+1} \right) (x-1) \right]' \right], \text{ pour tout } x \in \mathbb{R},$$

donc $\left[\left((x-1)^2 f(x) \right)' \right]_{x=1} = 2 = a_1$ i.e. $a_1 = 2$.

Calcul de b (Esquisse) : calcul à partir des valeurs connues des coefficients a_1 et a_2

De $xf(x) = \frac{2x}{x-1} + \frac{3x}{(x-1)^2} + \frac{bx^2+cx}{x^2+1} = \frac{2x^4 + 2x^3 + 2x}{(x-1)^2(x^2+1)}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

nous en déduisons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [xf(x)] = 2 + b = 2$ i.e. $b = 0$.

Calcul de c (Esquisse) : calcul à partir des valeurs connues des coefficients a_1 et a_2

De $f(x) = \frac{2x^3 + 2x^2 + 2}{(x-1)^2 (x^2 + 1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{bx+c}{x^2+1}$, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, nous en déduisons pour $x = 0$ que

$$f(0) = \frac{2}{1} = \frac{2}{-1} + \frac{3}{1} + \frac{c}{1}, \text{ ce qui donne } c = 1.$$

En conséquence il suit de la décomposition dans \mathbb{R} de F est

$$F = X - 2 + \frac{2}{X-1} + \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{1}{X^2+1} \text{ sur } \mathbb{R} \setminus \{1\}. \bullet \bullet$$