Aix-Marseille Université
Institut Universitaire de Technologie
Département Réseaux et Télécommunications

Année 2021-2022
M3204
Calcul matriciel

Calcul matriciel

Table des matières

Dans tout ce document, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrices

1.1 Définition

Une matrice M est un tableau à $n \geq 1$ lignes et $p \geq 1$ colonnes, d'éléments de K. On numérote les coefficients avec deux indices : le premier est le numéro de ligne (on numérote de haut en bas) et le second est le numéro de colonne (on numérote de gauche à droite). Ainsi a_{ij} est l'élément situé à l'intersection de $i^{\text{ième}}$ ligne et de la $j^{\text{ième}}$ colonne. On note $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ la matrice correspondante :

$$(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Lorsque la ligne i et la colonne j ne sont pas spécifiées, a_{ij} s'appelle le terme général de la matrice $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$.

La matrice $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est de taille (n, p) (dans cet ordre).

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes (appelées plus simplement matrices (n, p) dans la suite) à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

Exemple 1. Si $(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ alors on a :

$$\begin{cases} a_{11} = 1, & a_{12} = 2, & a_{13} = 3 \\ a_{21} = 4, & a_{22} = 5, & a_{23} = 6. \end{cases}$$

Exemple 2. $(2i + j)_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$ et $(i - j)_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 3}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1.2 Matrices particulières

1.2.1 Matrices colonnes

Ce sont les matrices à une colonne, donc de taille $(n, 1)$: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

1.2.2 Matrices lignes

Ce sont les matrices à une ligne, donc de taille $(1, p)$: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix}$.

1.2.3 Matrices carrées

Ce sont les matrices qui ont même nombre de lignes et de colonnes, appelé ordre de la matrice. Les coefficients ayant même indice de ligne et colonne sont appelés coefficients diagonaux. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2 dont les éléments diagonaux sont 1 et 4.

On note $M_n(\mathbb{K})$ (à la place de $M_{n,n}(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1.2.4 Matrices triangulaires inférieures

Ce sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement au dessus de la diagonale (c'est-à-dire d'indices ij avec $i < j$) sont nuls. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.2.5 Matrices triangulaires supérieures

Ce sont les matrices carrées dont tous les coefficients strictement en dessous de la diagonale (c'est-à-dire d'indices ij avec $j < i$) sont nuls. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.2.6 Matrices diagonales

Ce sont les matrices carrées qui sont à la fois triangulaires inférieures et triangulaires supérieures. Les seuls coefficients éventuellement non nuls sont donc ceux situés sur la diagonale. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathrm{Diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ la matrice diagonale dont les coefficients sont $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

1.2.7 Matrices scalaires

Ce sont les matrices diagonales dont tous les coefficients sont égaux. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

1.2.8 Matrice identité

Ce sont la matrice scalaire dont les coefficients valent 1. On note I_n la matrice identité d'ordre n, ou simplement I s'il n'y a pas d'ambiguïté. Par exemple :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2.9 Matrice nulle

C'est la matrice (pas nécessairement carrée) dont tous les coefficients sont nuls. On note $0_{n,p}$ la matrice nulle à n lignes et p colonnes, ou simplement 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté. Par exemple :

$$0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Calcul matriciel

2.1 Égalité matricielle

Deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n' \\ 1 \le j \le p'}}$ sont égales, ce que l'on note $A = B$, si

i) elles ont même nombre de lignes : $n = n'$;

ii) elles ont même nombre de colonnes : $p = p'$;

iii) leurs coefficients de mêmes indices sont égaux : $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, p\}$.

Exemple 3.

$$\begin{pmatrix} \pi & 1 \\ -1 & \pi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi & 2-1 \\ 1-2 & \pi \\ 4-3 & \pi/\pi \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2 Addition matricielle

Soient A et B deux matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant même nombre de lignes n et même nombre de colonnes p : $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. La somme $A + B$ de A et B est la matrice (n, p) dont chaque coefficient est la somme des coefficients de même position de A et de B.
Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ alors

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}.$$

Exemple 5.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+(-1) & 1+0 & 2+1 \\ 3+(-2) & 4+(-1) & 5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Les règles suivantes se déduisent de celles de l'addition dans $\mathbb{K}$:

Proposition 2.1. *Soient A, B et C trois matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$.*

a) l'addition est associative : $(A + B) + C = A + (B + C)$;

b) l'addition est commutative : $A + B = B + A$;

c) la matrice nulle $0_{n,p}$ est élément neutre pour l'addition dans $M_{n,p}(\mathbb{K})$: $A + 0_{n,p} = A$;

d) toute matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ admet un symétrique, noté $-A$ et défini par $-A = (-a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$, de sorte que $A + (-A) = 0_{n,p}$.

Remarque 2.1. *On note $A - B$ la somme de A et du symétrique $-B$ de B, de sorte que $A - B = A + (-B)$.*

2.3 Multiplication par un scalaire

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle produit (externe) de λ par A, la matrice notée λA, obtenue en multipliant chaque coefficient de A par λ :

$$\lambda A = \lambda (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}.$$

Exemple 6.

$$\pi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \pi & 2\pi \\ 3\pi & 4\pi & 5\pi \end{pmatrix}.$$

Les règles suivantes se déduisent de celles de la multiplication dans $\mathbb{K}$ et de la Proposition 2.1.

Proposition 2.2. *Soient A et B deux matrices de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ et soient λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$.*

a) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$;

b) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$;

c) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;

d) $1A = A$.

Remarque 2.2. *Dans b), le choix de $\lambda = 1$ et $\mu = -1$ montre que $(-1)A = -A$.*

2.4 Produit matriciel

2.4.1 Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Soient $A = (a_1 \dots a_p)$ une matrice ligne de $M_{1,p}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $M_{p,1}(\mathbb{K})$.

Remarque 2.3. *Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.*

Le produit de A par B, noté AB est la matrice $(1,1)$ dont le coefficient est :

$$a_1b_1 + \dots a_pb_p = \sum_{k=1}^{p} a_k b_k.$$

Exemple 7.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = ((-1)\times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 3) = (2).$$

2.4.2 Produit d'une matrice par une matrice colonne

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $M_{p,1}(\mathbb{K})$.

Remarque 2.4. *La matrice A a autant de colonnes que B a de lignes.*

Le produit de A par B, noté AB, est la matrice $(n,1)$ dont la ligne n^o i est le coefficient du produit de la ligne n^o i de A avec B :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coefficient de } \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \text{coefficient de } \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{ip} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \text{coefficient de } \begin{pmatrix} a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + \dots + a_{1p}b_p \\ \vdots \\ a_{i1}b_1 + \dots + a_{ip}b_p \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + \dots + a_{np}b_p \end{pmatrix}.$$

Exemple 8.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \\ \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\times 1+1\times 2+2\times 3 \\ 3\times 1+4\times 2+5\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 26 \end{pmatrix}.$$

2.4.3 Produit d'une matrice par une matrice

Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ deux matrices.

Remarque 2.5. *Ici encore le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.*

Le produit de A par B, noté AB, est la matrice (n,q) dont la colonne n^o j est le produit de A par la colonne n^o j de B.

Autrement dit, si pour tout $j \in \{1,\dots,q\}$, $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}$ désigne la colonne n^o j de $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le p \\ 1\le j\le q}}$,

alors on a :

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & \boxed{B_2} & \dots & \boxed{B_q} \end{pmatrix} \text{ et } AB = \begin{pmatrix} \boxed{AB_1} & \boxed{AB_2} & \dots & \boxed{AB_q} \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.6. *Pour tout $j \in \{1,\dots,q\}$ le produit de la matrice A par B_j est bien défini, car la matrice colonne B_j a autant de lignes que A a de colonnes.*

Exemple 9. Pour multiplier $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ par $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ on commence par identifier $B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $B_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $B_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Reste ensuite à calculer

$$\begin{aligned} AB_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \\ \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0\times 0+1\times(-1)+2\times(-2) \\ 3\times 0+4\times(-1)+5\times(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -14 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \\ \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0\times 1+1\times 0+2\times(-1) \\ 3\times 1+4\times 0+5\times(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$AB_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \\ \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \times 2 + 1 \times 1 + 2 \times 0 \\ 3 \times 2 + 4 \times 1 + 5 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix},$$

et

$$AB_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \\ \text{coefficient de } \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \times 3 + 1 \times 2 + 2 \times 1 \\ 3 \times 3 + 4 \times 2 + 5 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 22 \end{pmatrix},$$

puis à former la matrice produit :

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{AB_1} & \boxed{AB_2} & \boxed{AB_3} & \boxed{AB_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 & 4 \\ -14 & -2 & 10 & 22 \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.7. *Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q}}$ alors pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et tout $j \in \{1, \ldots, q\}$, le coefficient d'indice ij de AB est :*

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}. \tag{1}$$

En d'autres termes, pour calculer le coefficient d'indice ij de la matrice $C = AB$, noté c_{ij}, il faut effectuer le produit de

- *— la matrice ligne formée par la ligne n° i de la matrice A, avec*
- *— la matrice colonne formée par la colonne d'indice n° j de la matrice B :*

$$\begin{array}{c} \\ i \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \hline a_{i1} & \ldots & a_{ip} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} j \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & \boxed{b_{1j}} & \ldots & b_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \ldots & \boxed{b_{pj}} & \ldots & b_{pq} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} j \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1j} & \ldots & c_{1q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \ldots & \boxed{c_{ij}} & \ldots & c_{iq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nj} & \ldots & c_{nq} \end{pmatrix} \end{array} \leftarrow i$$

2.4.4 Propriétés

Restriction. Le produit matriciel AB n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. Et dans ce cas, la matrice produit AB a autant de lignes que A et autant de colonnes que B.

Les propriétés suivantes se démontrent à partir de la formule (1).

Associativité. Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{q,r}(\mathbb{K})$. Alors on a l'égalité suivante :

$$(AB)C = A(BC).$$

Remarque 2.8. *Le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B donc la matrice AB est bien définie et est de taille (n, q). Ensuite, le nombre de colonnes de AB est égal au nombre de lignes de C donc la matrice $(AB)C$ est bien définie et est de taille (n, r). De même, le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de C donc la matrice BC est bien définie et est de taille (p, r). Enfin, comme le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de BC alors la matrice $A(BC)$ est bien définie et est de taille (n, r).*

Non commutativité. La multiplication matricielle n'est pas commutative. C'est évident lorsque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B mais que le nombre de colonnes de B différe du nombre de lignes de A, comme dans l'Exemple 9 (où le produit matriciel AB est bien défini alors qu'on ne peut pas multiplier B par A puisque B a 4 colonnes alors que A n'a que 2 lignes). Mais, même lorsque A et B sont deux matrices carrées de même ordre, il peut arriver que $AB \neq BA$. C'est le cas par exemple si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, puisque dans ce cas particulier on a :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ mais } BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Matrice identité et multiplication. Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ alors on a :

$$I_n A = A I_p = A.$$

Distributivité par rapport à l'addition.

— Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ alors on a :

$$(A + B)C = AB + BC.$$

— Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ alors :

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Compatibilité avec le produit externe. Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

Diviseur de zéro.

— Le produit de deux matrices non nulles peut être nul. C'est par exemple le cas de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, puisqu'on vérifie par le calcul que :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + (-2) \times 1 & 1 \times 4 + (-2) \times 2 & 1 \times 6 + (-2) \times 3 \\ (-3) \times 2 + 6 \times 1 & (-3) \times 4 + 6 \times 2 & (-3) \times 6 + 6 \times 3 \end{pmatrix} = 0_{2,3}.$$

On dit que A est un diviseur de zéro à gauche et que B est un diviseur de zéro à droite.

— Et même si les matrices A et B sont carrées (et de même ordre), ce phénomène ne peut être exclu. Ainsi par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, on a :

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 2 \times (-1) & 1 \times (-6) + 2 \times 3 \\ 2 \times 2 + 4 \times (-1) & 2 \times (-6) + 4 \times 3 \end{pmatrix} = 0_2.$$

— On voit ainsi d'une façon générale, pour $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, que :

$$(AB = 0_{n,q}) \not\Rightarrow (A = 0_{n,p} \text{ ou } B = 0_{p,q}).$$

2.4.5 Puissances

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ et si $k \in \mathbb{N}$, on définit la puissance $k^{\text{ième}}$ de A comme suit :

$$A^k = \begin{cases} I_n & \text{si } k = 0; \\ A^{k-1}A & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

Exemple 10. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^0 = I_2$, $A^1 = A$ et

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 1 + 0\times 0 & 1\times 0 + 0\times 0 \\ 0\times 1 + 0\times 0 & 0\times 0 + 0\times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

Ainsi, $A^3 = A^2A = AA = A^2 = A$ donc par récurrence immédiate sur k, on voit que $A^k = A$ pour tout $k \geq 1$.

2.4.6 Inverse d'une matrice carrée

Tout scalaire non nul $x \in \mathbb{K}^*$ admet un inverse, c'est-à-dire un scalaire $y \in \mathbb{K}$ tel que $xy = 1$, et par commutativité de la multiplication dans $\mathbb{K}$, $yx = 1$. Cet inverse y est noté x^{-1} ou encore $1/x$. Mais comme la multiplication matricielle dans $M_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutative, il convient d'être un peu plus prudent avec les matrices carrées.

Définition 2.1. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $B \in M_n(\mathbb{K})$ est dite inverse à droite (resp., à gauche) de A si $AB = I_n$ (resp., $BA = I_n$).*

Si A admet un inverse à droite B et un inverse à gauche C, alors $B = C$. En effet, grâce à l'associativité du produit matriciel, on a :

$$B = I_nB = (CA)B = C(AB) = CI_n = C.$$

Dans ce cas, on peut dire que $B = C$ est un inverse de A, en ce sens que $AB = BA = I_n$.
De plus, si A admet un inverse alors cet inverse est unique. En effet, si A a deux inverses B et C, alors B (resp., C) est en particulier un inverse à droite (resp., à gauche) de A, donc $B = C$ en vertu du raisonnement précédent.

Définition 2.2. *Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite inversible (ou régulière) s'il elle admet un inverse à droite et à gauche. Cet inverse est alors unique et il est noté A^{-1}. C'est l'unique matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = BA = I_n$.*

Exemple 11. a) $A = I_n$ est inversible et $A^{-1} = I_n$ puisque $AI_n = I_nA = A = I_n$;

b) On voit que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, en vérifiant directement que :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

c) A contrario la matrice nulle d'ordre n, 0_n n'est pas inversible. En effet, si tel était le cas, il existerait une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $0_nB = B0_n = I_n$. Ce qui est impossible puisque $0_nB = 0_n$.

Exercice 1. Etant donnés $A \in M_n(\mathbb{K})$, une matrice inversible, et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, montrer que λA est inversible et que

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}.$$

Exercice 2. Si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont tous non nuls, montrer que la matrice $\text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$ est inversible, d'inverse $\text{Diag}\left(a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1}\right)$.

Exercice 3. Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $B \in M_n(\mathbb{K})$ sont deux matrices inversibles, montrer que AB est inversible, d'inverse

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Dans les faits, le résultat suivant (admis) permet d'oublier la distinction entre entre inverse à droite et inverse à gauche.

Théorème 2.1. *Si une matrice carrée admet un inverse* `droite *(resp., à gauche) alors elle admet également un inverse à gauche (resp., à droite). Elle est donc inversible.*

Le Théorème 2.1 implique que si $A \in M_n(\mathbb{K})$ admet un inverse à droite OU à gauche B, alors A est inversible et $A^{-1} = B$:

$$\begin{cases} \text{si } AB = I_n \text{ alors } BA = I_n, \text{ donc } A \text{ est inversible et } B = A^{-1}; \\ \text{si } BA = I_n \text{ alors } AB = I_n, \text{ donc } A \text{ est inversible et } B = A^{-1}. \end{cases}$$

En pratique, cela signifie qu'il suffit de vérifier que B est un inverse à droite OU à gauche B de A pour affirmer que A est inversible, d'inverse $A^{-1} = B$.

Exemple 12. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors, l'une seulement des deux égalités suivantes,

$$A \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \text{ ou } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = I_2,$$

suffit à démontrer que la matrice A est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque 2.9. *Il n'existe pas de critère simple permettant de déterminer immédiatement si une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ est inversible (régulière) ou non (on parle dans ce cas de matrice singulière). Par exemple, le fait qu'une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ soit non nulle, ne garantit pas qu'elle est inversible. Pour le voir, il suffit de considérer la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, qui a tous ses coefficients non nuls, mais qui, pourtant, est singulière (non inversible). En effet, si A était inversible alors il existerait $B = A^{-1} \in M_2(\mathbb{R})$ telle que*

$$A^{-1}A = I_2.$$

Or, si $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on vérifie facilement que $AX = 0_{2,1}$, et donc par associativité de la multiplication,

$$X = I_2X = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}0_{2,1} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qui est faux puisque $X \neq 0_{2,1}$. Par suite, A est une matrice singulière.

2.5 Déterminants

À toute matrice carrée, on associe un nombre réel

3 Inversion

3.1 Calcul de l'inverse d'une matrice : méthode du pivot de Gauss

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$. Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on note L_i la ligne n^o i de la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{array}.$$

3.1.1 Opérations sur les lignes

On définit trois types d'opérations sur les lignes L_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, de la matrice A :

— $\mathbf{M}_i(\lambda)$: la multiplication d'une ligne L_i par un scalaire non nul $\lambda \in \mathbb{K}^*$, notée "$L_i \leftarrow \lambda L_i$" :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad L_i \leftarrow \lambda L_i \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{i1} & \ldots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— $\mathbf{P}_{ik}$: la permutation des lignes L_i et L_k, notée "$L_i \leftrightarrow L_k$" :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad L_i \leftrightarrow L_k \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & \lambda a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

— $\mathbf{S}_{ik}(\lambda)$ pour $i \neq k$: l'addition de la ligne L_k, multipliée par $\lambda \in \mathbb{K}$, à la ligne L_i, qui est notée "$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$" :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \lambda a_{k1} & \ldots & a_{in} + \lambda a_{kn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3.1.2 Description de la méthode

L'objectif de la méthode est de transformer la matrice A en la matrice identité d'ordre n, I_n, à l'aide des seules opérations de type $\mathbf{M}$, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{S}$, décrites au §3.1. Dans la suite, afin d'alléger les notations, les différentes matrices obtenues à partir de A en appliquant les opérations sur les lignes précédentes, sont encore notées A.

La méthode (dite du "Pivot de Gauss") procède comme suit :

— si $a_{i1} = 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ (ce qui signifie que la première colonne de A est nulle), alors A n'est pas inversible, et c'est fini ;

— sinon, il existe au moins un indice $i_0 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $a_{i_0 1} \neq 0$. Ce coefficient (a_{i01}) est appelé "pivot" de la première colonne. Quitte à permuter les lignes L_1 et L_{i_0} $(L_1 \leftrightarrow L_{i_0})$, on peut donc supposer que $a_{11} \neq 0$. Autrement dit, on peut toujours (au prix d'une éventuelle permutation sur les lignes de la matrice A) ramener le pivot de la première colonne de A sur la première ligne, et donc sur la diagonale de A. Ceci fait, on effectue alors les opérations suivantes (dans l'ordre indiqué ci-dessous) :

1. $L_1 \leftarrow \frac{1}{a_{11}} L_1$, ce qui donne $a_{11} = 1$;
2. $L_j \leftarrow L_j - a_{j1} L_1$, pour tout $j \in \{2, 3, \ldots, n\}$, ce qui remplace tous les termes de la première colonne de M, à l'exception du premier d'entre eux, par 0. La matrice A transformée par les opérations sur les lignes décrites ci-dessus devient ainsi :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \ldots & * \end{pmatrix}.$$

— On applique ensuite la méthode précédente à la deuxième colonne de A, à ceci près que l'on recherche le pivot de la deuxième colonne parmi les $n-1$ coefficients qui ne sont pas situés au dessus de la diagonale :
  - — si $a_{i2} = 0$ pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$ (tous les termes de la deuxième colonne de A qui sont situés en dessous de a_{12} sont nuls, donc le pivot de cette colonne est nul), alors la matrice A n'est pas inversible, et c'est fini ;
  - — sinon, il existe $i_0 \in \{2, \ldots, n\}$ tel que $a_{i_0 2} \neq 0$ (c'est le pivot de la seconde colonne) et donc, quitte à permuter L_2 avec L_{i_0}, on est en droit de supposer que $a_{22} \neq 0$, c'est-à-dire que le pivot de la deuxième colonne est situé sur diagonale. On effectue alors les opérations suivantes :
    1. $L_2 \leftarrow \frac{1}{a_{22}} L_2$, ce qui donne $a_{22} = 1$;
    2. $L_j \leftarrow L_j - a_{j2} L_2$, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{2\}$ (tous les indices j entre 1 et n sauf 2), ce qui a pour effet de remplacer tous les termes de la deuxième colonne de A, à l'exception du deuxième d'entre eux, par 0. A ce stade, la matrice A est devenue :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & * & \ldots & * \\ 0 & 1 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \ldots & * \end{pmatrix}.$$

Et ainsi de suite, jusqu'à ce que :

— soit la méthode s'arrête parce que le pivot de l'une des colonnes de A est nul, auquel cas A n'est pas inversible ;

— soit A est transformée en la matrice I_n, auquel cas A est inversible et sa matrice inverse A^{-1} s'obtient en reportant à l'identique sur la matrice I_n, toutes les opérations effectuées précédemment sur les lignes de A.

Exemple 13. La matrice à inverser est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Appliquons la méthode du pivot de Gauss à A tout en effectuant les opérations sur les lignes correspondantes, en parallèle sur la matrice I_3. Les étapes du calcul se présentent comme suit :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{-2} & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftrightarrow L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{-2} & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow -L_2/2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & \mathbf{-1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow -L_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3/2 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3/2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -3/2 & 3/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La méthode du pivot permet de transformer la matrice A en I_3. Donc A est inversible et son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 14. Vérifions à l'aide de la méthode du pivot de Gauss si la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux coefficients de la troisième colonne de la matrice obtenue à partir de A en appliquant la méthode du pivot de Gauss, qui ne sont pas situés au dessus de la diagonale, sont nuls. Par conséquent le pivot de la troisième colonne est nul. La matrice A n'est donc pas inversible.

3.1.3 Application à la résolution de systèmes linéaires

Soit le système linéaire à 3 inconnues (x_1, x_2, x_3) et 3 équations suivant,

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & b_1 \\ x_1 & + & x_2 & & & = & b_2 \\ 2x_1 & + & & & 3x_3 & = & b_3, \end{array} \right. \tag{2}$$

où b_1, b_2 et b_3 sont trois réels donnés. Alors, en posant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

on voit que (x_1, x_2, x_3) est solution du système (2) si et seulement si X est solution de l'équation matricielle suivante :

$$AX = B. \tag{3}$$

Comme la matrice A est inversible d'après l'Exemple 13, alors il existe une unique solution à (3) :

$$X = I_3 X = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}B,$$

soit

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3b_1 + 3b_2 + b_3 \\ 3b_1 - b_2 - b_3 \\ 2b_1 - 2b_2 \end{pmatrix}.$$

Par suite, le système (2) admet une unique solution

$$x_1 = \frac{-3b_1 + 3b_2 + b_3}{2}, \; x_2 = \frac{3b_1 - b_2 - b_3}{2}, \; x_3 = b_1 - b_2.$$

D'une façon plus générale, on considère le système linéaire à n équations, et n inconnues $(x_1, \ldots, x_n$ suivant,

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n & = & b_n, \end{array}\right. \tag{4}$$

où a_{ij} et b_j, $1 \leq i, j \leq n$, sont des réels donnés. Alors en posant

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

il est clair que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est solution du système linéaire (4) si et seulement X est solution de l'équation matricielle $AX = B$. Par conséquent, si la matrice A est inversible alors on a nécessairement $X = A^{-1}B$, et le système (4) admet une unique solution. On dit alors que (4) est un système de Cramer. Par contre, dans le cas où A n'est pas inversible, on verra au §4 que "tout peut se produire" en ce sens que, suivant la valeur de B, l'équation matricielle $AX = B$ peut admettre une inifinité de solutions ou bien ne pas avoir de solution du tout. On peut facilement s'en convaincre en prenant par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. En effet, si $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on vérifie en posant $X(\lambda) = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, que

$$AX(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda-\lambda \\ 1+\lambda-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B.$$

Donc l'équation $AX = B$ admet une infinité de solutions $X = X(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. A contrario, si $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors l'équation $AX = B$ n'a pas de solution. En effet, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ était solution de $AX = B$, c'est-à-dire si

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

alors on aurait nécessairement $x_1 + x_2 = 1 = 0$, ce qui est impossible.

3.2 Justification de la méthode du pivot

L'idée est de remarquer que chacune des opérations $\mathbf{M_i}(\lambda)$, $\mathbf{P_{ij}}$ ou $\mathbf{S_{ik}}$ sur les lignes, s'obtient par multiplication à gauche par une matrice carrée que l'on va construire. Pour cela on commence par définir les :

3.2.1 Matrices élémentaires

Définition. Pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, on appelle matrice élémentaire d'ordre n et d'indices i et j, notée E_{ij}, la matrice carrée d'ordre n, dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception de celui situé à l'intersection de la ligne n^o i et de colonne n^o j, qui vaut 1 :

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \\ & & & \downarrow & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Autrement dit, pour tout $(k, \ell) \in \{1, \dots, n\}^2$, on a, par définition de E_{ij} :

$$(E_{ij})_{k,\ell} = \delta_{ik}\delta_{j\ell},$$

où le “symbole de Kronecker" δ est défini comme suit :

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{si } r = s \text{ ;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $i = j$ on note simplement $E_i = E_{ii}$.

Multiplication à gauche par E_{ij}. Le produit $E_{ij}A$ de la matrice élémentaire E_{ij} par la matrice carrée $A = (a_{k\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ d'ordre n, s'obtient en remplaçant la ligne n^o i de la matrice carrée nulle d'ordre n, par la ligne n^o j de la matrice A :

$$E_{ij}A = E_{ij} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

En remplaçant A par $E_{k\ell}$ dans l'égalité précédente, on obtient facilement :

$$E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell}. \tag{5}$$

Au vu de la définition de δ, l'égalité (5) signifie que $E_{ij}E_{k\ell} = 0_n$ si $j \neq k$ et que $E_{ij}E_{j\ell} = E_{i\ell}$.

3.2.2 Matrices $M_i(\lambda)$, $S_{ik}(\lambda)$ et P_{ik}

Matrices $M_i(\lambda)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, posons

$$M_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_i = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} & & & i & & & & \\ & & & \downarrow & & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

On vérifie facilement à l'aide de (5) que :

$$M_i(\lambda)A = I_nA + (\lambda-1)E_iA = A + (\lambda-1)\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1n} \\ \lambda a_{i1} & \dots & \lambda a_{in} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que multiplier la matrice A à gauche par $M_i(\lambda)$ c'est multiplier la ligne n^o i de A par λ, donc effectuer l'opération $\mathbf{M_i}(\lambda)$ sur A.
Donc si $\lambda \neq 0$, la matrice $M_i(\lambda^{-1})$ est bien définie, et d'après ce qui précède, on a :

$$M_i(\lambda^{-1})M_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda^{-1}\lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

soit $M_i(\lambda^{-1})M_i(\lambda) = I_n$. La matrice $M_i(\lambda)$ est donc inversible, d'inverse $M_i(\lambda^{-1})$.

Remarque 3.1. *On peut vérifier de façon formelle le calcul précédent, en tenant compte du fait que l'on a* $E_i^2 = E_i$*, en vertu* (5)*. En effet, d'après la définition de* $M_i(\lambda^{\pm})$*, on a :*

$$\begin{aligned} M_i(\lambda^{-1})M_i(\lambda) &= (I_n + (\lambda-1)E_i)(I_n + (\lambda^{-1}-1)E_i) \\ &= I_n + (\lambda+\lambda^{-1}-2)E_i + (\lambda-1)(\lambda^{-1}-1)E_i^2 \\ &= I_n + \left(\lambda+\lambda^{-1}-2+(\lambda-1)(\lambda^{-1}-1)\right)E_i \\ &= I_n, \end{aligned}$$

car $(\lambda-1)(\lambda^{-1}-1) = 2-\lambda-\lambda^{-1}$.

Matrices $S_{ik}(\lambda)$, $i \neq k$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, posons $S_{ik} = I_n + \lambda E_{ik}$, de sorte que

$$S_{ik}(\lambda)A = (I_n + \lambda E_{ik})A = A + \lambda E_{ik}A = A + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ \lambda a_{k1} & \dots & \lambda a_{kn} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

et donc

$$S_{ik}(\lambda)A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1}+\lambda a_{k1} & \dots & a_{in}+\lambda a_{kn} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \leftarrow i$$

Ainsi, multiplier A à gauche par $S_{ik}(\lambda)$ revient à ajouter λ-fois la ligne n^o k à la ligne n^o i de la matrice A. Donc l'opération sur les lignes $\mathbf{S}_{ik}(\lambda)$ s'obtient par multiplication à gauche par la matrice $S_{ik}(\lambda)$.
A partir de là, il est facile de voir que $S_{ik}(\lambda)$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, d'inverse

$$S_{ik}(\lambda)^{-1} = S_{ik}(-\lambda) = I_n - \lambda E_{ik}.$$

En effet, on a :

$$\begin{aligned}(I_n - \lambda E_{ik})S_{ik}(\lambda) &= (I_n - \lambda E_{ik})(I_n + \lambda E_{ik}) \\ &= I_n + \lambda E_{ik} - \lambda E_{ik} - \lambda^2 E_{ik}^2 \\ &= I_n,\end{aligned}$$

car $E_{ik}^2 = 0_n$ en vertu de (5), puisque l'on a supposé ici que $i \neq k$.

Matrices P_{ik}. Posons $P_{ik} = I_n + E_{ik} + E_{ki} - (E_i + E_k)$.
On remarque qu'avec cette définition, on a $P_{ik} = P_{ii} = I_n$ si $i = k$. On vérifie ensuite pour toute matrice carrée A d'ordre n, que $P_{ik}A$ est égale à la matrice A dont on a permuté lignes n^o i et k. Ainsi, l'opération $\mathbf{P}_{ik}$ s'obtient par multiplication à gauche par la matrice P_{ik}.
De plus, il est facile de voir que $P_{ik}^2 = I_n$ et donc que la matrice P_{ik} est inversible et est sa propre inverse :

$$P_{ik}^1 = P_{ik}.$$

3.2.3 Description de la méthode du pivot au moyen des matrices $M_i(\lambda)$, $S_{ik}(\lambda)$ et P_{ik}

Pour la simplicité de l'exposé, on va décrire méthode du pivot de Gauss à l'aide des matrices $M_i(\lambda)$, $S_{ik}(\lambda)$ et P_{ik}, pour une matrice inversible particulière, qui est celle de l'Exemple 13. Dans ce cas particulier, on a $n = 3$ donc il y a $n^2 = 9$ matrices élémentaires distinctes :

$$E_{11} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ E_{12} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ E_{13} = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ E_{22} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ E_{23} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$E_{31} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\ E_{32} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ E_{33} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Eu égard à la correspondance établie au §3.2.2 entre $\mathbf{M}_i(\lambda)$ (resp., $\mathbf{S}_{ik}(\lambda)$, $\mathbf{P}_{ik}$) et la multiplication à gauche par la matrice $M_i(\lambda)$ (resp., $S_{ik}(\lambda)$, P_{ik}), en s'inspirant des opérations sur les lignes de la matrice

$$A = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\2&0&3\end{pmatrix}$$

effectuées dans l'Exemple 3, on multiplie à gauche successivement par $S_{21}(-1)$, $S_{31}(-2)$, P_{23}, $M_2(-1/2)$, $S_{12}(-1)$, $M_3(-1)$, $S_{13}(-3/2)$ et $S_{23}(1/2)$ (dans cet ordre) les deux matrices A et I_3, comme suit :

1. Multiplication à gauche par $S_{21}(-1) = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$$A_1 = S_{21}(-1)A = \begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-1\\2&0&3\end{pmatrix},\ B_1 = S_{21}(-1)I_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};$$

2. Multiplication à gauche par $S_{31}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A_2 = S_{31}(-2)A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ B_2 = S_{31}(-2)B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

3. Multiplication à gauche par $P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$A_3 = P_{23}A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ B_3 = P_{23}B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

4. Multiplication à gauche par $M_2(-1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A_4 = M_2(-1/2)A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ B_4 = M_2(-1/2)B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

5. Multiplication à gauche par $S_{12}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A_5 = S_{12}(-1)A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ B_5 = S_{12}(-1)B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

6. Multiplication à gauche par $M_3(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$:

$$A_6 = M_3(-1)A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B_6 = M_3(-1)B_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

7. Multiplication à gauche par $S_{13}(-3/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A_7 = S_{13}(-3/2)A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B_7 = S_{13}(-3/2)B_6 = \begin{pmatrix} -3/2 & 3/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Multiplication à gauche par $S_{23}(1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A_8 = S_{23}(1/2)A_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B_8 = S_{23}(1/2)B_7 = \begin{pmatrix} -3/2 & 3/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on a obtenu que :

$$\begin{aligned}
B_8 &= S_{23}(1/2)B_7 \\
&= S_{23}(1/2)S_{13}(-3/2)B_6 \\
&= S_{23}(1/2)S_{13}(-3/2)M_3(-1)B_5 \\
&= \ldots \\
&= S_{23}(1/2)\ S_{13}(-3/2)\ M_3(-1)\ S_{12}(-1)\ M_2(-1/2)\ P_{23}\ S_{31}(-2)\ S_{21}(-1)I_3 \\
&= S_{23}(1/2)\ S_{13}(-3/2)\ M_3(-1)\ S_{12}(-1)\ M_2(-1/2)\ P_{23}\ S_{31}(-2)\ S_{21}(-1).
\end{aligned}$$

En procédant de façon similaire, il vient :

$$\begin{aligned}
A_8 &= S_{23}(1/2)A_7 \\
&= S_{23}(1/2)S_{13}(-3/2)A_6 \\
&= S_{23}(1/2)S_{13}(-3/2)M_3(-1)A_5 \\
&= \ldots \\
&= S_{23}(1/2)\ S_{13}(-3/2)\ M_3(-1)\ S_{12}(-1)\ M_2(-1/2)\ P_{23}\ S_{31}(-2)\ S_{21}(-1)A \\
&= B_8A,
\end{aligned}$$

ce qui établit que A est inversible, d'inverse B_8.

Remarque 3.2. *Comme chacune des 8 matrices entrant dans la définition de B_8 est inversible, on pouvait tout de suite prévoir, grâce à l'Exercice 3, que la matrice B_8 est inversible, d'inverse :*

$$\begin{aligned}
B_8^{-1} &= S_{21}(-1)^{-1}\ S_{31}(-2)^{-1}\ P_{23}^{-1}\ M_2(-1/2)^{-1}\ S_{12}(-1)^{-1}\ M_3(-1)^{-1}\ S_{13}(-3/2)^{-1}\ S_{23}(1/2)^{-1} \\
&= S_{21}(1)\ S_{31}(2)\ P_{23}\ M_2(-2)\ S_{12}(1)\ M_3(-1)\ S_{13}(3/2)\ S_{23}(-1/2).
\end{aligned}$$

4 Systèmes linéaires

4.1 Généralités

Un système linéaire de n équations à p inconnues $x_1, x_2, \dots, x_p$ est un ensemble d'équations linéaires de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n, \end{array}\right. \tag{6}$$

où pour tout $i = 1, \dots, n$ et tout $j = 1, \dots, p$, les coefficients a_{ij} et b_i sont fixés dans $\mathbb{K}$. Alors, en posant

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

résoudre le système linéaire (6) c'est trouver toutes les matrices

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

vérifiant l'égalité matricielle suivante :

$$AX = B.$$

Par définition, A est la *matrice du système* (6) et B est son *second membre*. Si $B = 0_{n,1}$ alors le système linéaire (6) est dit *homogène* et on appelle *système homogène associé* (6) le système $AX = 0_{n,1}$.

— Tout système homogène possède au moins une solution, à savoir la solution nulle $X = 0_{p,1}$;

— Si un système homogène possède une solution non nulle $X_0 \in M_{p,1}(\mathbb{K})$ alors il possède une infinité de solutions, puisque λX_0 est également solution pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$A(\lambda X_0) = \lambda A X_0 = \lambda 0_{n,1} = 0_{n,1}.$$

Par conséquent, l'ensemble des solutions du système homogène associé à (6) est

— soit réduit à $\{0_{p,1}\}$;

— soit constitué d'une infinité de matrices (dont $0_{p,1}$).

Proposition 4.1. *Si la matrice A est inversible (ce qui implique notamment que $n = p$) alors le système* (6) *admet une unique solution, qui est $X = A^{-1}B$.*

En effet, pour toute solution X de (6) on a $AX = B$ donc $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ et finalement $X = (A^{-1}A)X = A^{-1}B$, ce qui implique que $A^{-1}B$ est la seule solution possible de (6). Et comme, réciproquement, $A^{-1}B$ est bien solution de (6), c'est donc bien la seule solution existante.
Un système linéaire à n equations et n inconnues dont la matrice associée est inversible est dit *de Cramer*. D'après la propositon 4.1 tout système de Cramer admet une unique solution.

Exemple 15. Le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & = & 1, \end{array}\right.$$

est de Cramer car la matrice du système, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, est inversible. Il admet donc une unique solution

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4.2 Mise sous forme échelonnée

Une matrice (non nulle) est dite *échelonnée* si :

(i) Toute ligne non nulle a son premier coefficient non nul égal à 1 ;

(ii) Toute ligne suivant une ligne nulle est également nulle ;

(iii) Pour toute ligne non nulle dont le premier coefficient non nul est situé sur la colonne n^o j, le coefficient des j premières colonnes de la ligne suivante sont tous nuls.

La forme générale d'une matrice échelonnée est donc la suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & * & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 1 & * & \dots & \dots & \dots & * \\ \vdots & \vdots & & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $*$ désigne un coefficient quelconque de $\mathbb{K}$.

Exemple 16. Les matrices carrées d'ordre 2 échelonnées sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices à 2 lignes et 3 colonnes, mises sous forme échelonnée, sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{et} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices à 3 lignes et 2 colonnes, mises sous forme échelonnée, sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices carrées d'ordre 3 échelonnées sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{et} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 4.1. *On déduit facilement de la définition précédente que :*

— *si une matrice carrée est échelonnée et qu'elle n'a pas de ligne nulle, alors elle est triangulaire supérieure avec tous ses coefficients diagonaux égaux à* 1 *;*

— *les dernières lignes d'une matrice échelonnée qui a strictement plus de lignes que de colonnes, sont nécessairement nulles.*

Le théorème suivant est admis.

Théorème 4.1. *Toute matrice non nulle peut être transformée en une matrice échelonnée à l'aide d'une suite finie d'opérations sur ses lignes du type* $\mathbf{M}_i(\lambda)$, $\mathbf{P}_{ik}$ *ou* $\mathbf{S}_{ik}(\lambda)$, *décrites au* *§3.1.1.*

Exemple 17. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ peut être mise sous forme échelonnée, en effectuant la suite d'opérations suivantes :

$$\begin{array}{ll} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit A est une matrice échelonnée. Toute ligne non nulle de A est dite *principale*. Dans le système linéaire $AX = B$,

— toute équation associée à une ligne principale de A est dite *principale* ;

— toute inconnue associée au premier coefficient non nul d'une équation principale est une *inconnue principale*.

Exemple 18. Les lignes principales de la matrice échelonnée $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont les deux premières. Les équations principales du système

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 1. \end{array} \right.$$

Les inconnues principales sont x_1 et x_2.

4.3 Résolution par la méthode de Gauss

La méthode de Gauss consiste à transformer le système linéaire $AX = B$ à l'aide d'une suite de transformations sur les lignes (comme expliqué au §4.2), en un système $A'X = B'$ dont la matrice A' est échelonnée.

— Le système $A'X = B'$ possède (au moins) une solution si et seulement si les seconds membres des équations non principales sont tous nuls ;

— Dans ce cas on résout le système formé par les équations principales seules, en exprimant les inconnues principales en fonctions des inconnues non principales, considérées comme des paramètres libres de prendre toutes les valeurs de $\mathbb{K}$;

— L'ensemble obtenu est alors celui du système initial $AX = B$.

Exemple 19. On considère le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & = & 3 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En appliquant la suite d'opérations sur les lignes décrites à l'Exemple 17, on obtient

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Le système échelonné obtenu s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ & & & & & & 0 & = & 0. \end{array} \right.$$

Comme déjà vu à l'Exemple 18, la seule équation non principale est la troisième. Le second membre de cette équation est bien nul, donc le système possède au moins une solution. Les inconnues principales sont x_1 et x_2. Les solutions sont donc exprimées en fonctions de x_3 et x_4, considérées comme des paramètres : $x_2 = 1 + x_3 - 3x_4$ d'après la seconde équation et $x_1 = 2 + 2x_2 - x_4$ en vertu de la première, soit en reportant l'expression obtenue pour x_2 en fonction de x_3 et x_4,

$$x_1 = 2 + 2(1 + x_3 - 3x_4) - x_4 = 4 + 2x_3 - 7x_4.$$

L'ensemble des solutions du système est donc formé par les quadruplets (x_1, x_2, x_3, x_4) où $x_1 = 4 + 2x_3 - 7x_4$, $x_2 = 1 + x_3 - 3x_4$ et les deux paramètres x_3 et x_4 sont quelconques dans $\mathbb{R}$:

$$\{(4 + 2x_3 - 7x_4, 1 + x_3 - 3x_4, x_3, x_4),\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$