Aix-Marseille Université
Institut Universitaire de Technologie
Département Réseaux et Télécommunications

FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

Table des matières

Chapitre 1

Limites et continuité

1.1 Rappels

1.1.1 Intervalles

Soient a et b deux réels.
On appelle intervalle ouvert $]a, b[$ et intervalle fermé $[a, b]$ les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ définis par

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\} \quad \text{et} \quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}.$$

De même, on a

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\} \quad \text{et} \quad]a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}.$$

Par extension, on note :

$$\begin{cases} [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}; &]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x\} \\ ]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq a\}; &]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R},\ x < a\}. \end{cases}$$

1.1.2 Fonction numérique

On rappelle qu'une application d'un ensemble de départ E vers un ensemble d'arrivée F associe à tout élément de E un *unique* élément de F.
On appelle fonction numérique (de la variable réelle) toute application dont les ensembles d'arrivée et de départ sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.
On notera

$$\begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

L'ensemble D des réels qui possèdent une image $f(x)$ par f est le *domaine de définition de f*.

Remarque. Dans le cas où la fonction n'est définie que par l'expression de $f(x)$, on sous-entend que le domaine de définition de f est le sous-ensemble maximum de $\mathbb{R}$ sur lequel $f(x)$ existe.
Par exemple, si $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, il est sous-entendu que $D =]-\infty, -1[\cup]-1, +\infty[= \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

1.2 Limite finie

Soit f une fonction numérique de domaine D.

1.2.1 Limite en un point

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Le point x_0 peut éventuellement ne pas appartenir à D, mais on suppose que tout intervalle ouvert $]a, b[$ contenant x_0 rencontre D. On dit alors que x_0 *n'est pas isolé dans* D.

Définition

Par définition, le réel l est la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 si, à tout réel $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi, on est capable d'associer un réel $\alpha > 0$ (qui dépend généralement de ε) tel que

$$\underbrace{(x \in D \text{ et } |x - x_0| < \alpha)}_{x \in D \cap]x_0-\alpha, x_0+\alpha[} \Longrightarrow \underbrace{(|f(x) - l| < \varepsilon)}_{f(x) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[}.$$

On note alors $l = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
Dans le cas où elle existe, on admet que cette limite est unique.

Limite à droite, limite à gauche

On dit que l est la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures si, à tout réel $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi, on est capable d'associer un réel $\alpha > 0$ (qui dépend encore généralement de ε) tel que

$$\underbrace{(x \in D \text{ et } 0 < x - x_0 < \alpha)}_{x \in D \cap]x_0, x_0+\alpha[} \Longrightarrow \underbrace{(|f(x) - l| < \varepsilon)}_{f(x) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[}.$$

Le réel l est appelé "limite à droite" de f en x_0, et on note $l = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x)$ ou bien $l = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$.
Dans le cas où elle existe, cette limite à droite est unique.
De même, on dit que l est la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 par valeurs infèrieures si, à tout réel $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi, on est capable d'associer un réel $\alpha > 0$ (qui dépend encore une fois de ε) tel que

$$\underbrace{(x \in D \text{ et } 0 < x_0 - x < \alpha)}_{x \in D \cap]x_0-\alpha, x_0[} \Longrightarrow \underbrace{(|f(x) - l| < \varepsilon)}_{f(x) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[}.$$

Le réel l est appelé "limite à gauche" de f en x_0, et on note $l = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x)$ ou bien $l = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.
Dans le cas où elle existe, cette limite à gauche est, là encore, unique.

Exemple. Soit $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Il est clair que $x = 0$ n'est pas un point isolé de $D = \mathbb{R}^*$. Ensuite,

— si $x > 0$, on a $|x| = x$ donc $f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$;

— si $x < 0$, on a $|x| = -x$ donc $f(x) = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -1$.

Remarque. L'équivalence suivante découle très facilement des définitions précédentes :

$$(f \text{ possède une limite en } x_0) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{c} f \text{ possède une limite à gauche et à droite en } x_0 \\ \textit{qui sont égales} \end{array} \right).$$

1.2.2 Limite en x infini

On suppose que f est définie sur $D =]a, +\infty[$.
Par définition, le réel l est la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ si, à tout réel $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi, on est capable d'associer un réel M (qui dépend toujours a priori de ε) tel que

$$\underbrace{(x \in D \text{ et } x > M)}_{x \in D \cap]M, +\infty[} \Longrightarrow \underbrace{(|f(x) - l| < \varepsilon)}_{f(x) \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[}.$$

On note alors $l = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
Dans le cas où elle existe, on admet à nouveau que cette limite est unique.
La définition de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ est analogue.

1.2.3 Théorèmes pratiques sur les limites

Dans tout ce paragraphe, on peut remplacer x_0 par $\pm\infty$.

Théorème 1 – *Si f possède une limite en x_0, alors il existe un intervalle centré en x_0 sur lequel f est bornée.*

Démonstration. On sait que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$. Choisisons $\varepsilon = 1$ et traduisons l'existence de cette limite à l'aide de la définition : il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap D, \; |f(x) - L| < 1.$$

Cela implique que $|f(x)| = |(f(x) - L) + L| \leq |f(x) - L| + |L| < 1 + |L|$ pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap D$, ce qui montre que f est bornée par $1 + |L|$ sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. ■

Théorème 2 – *Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et que $f(x) \geq 0$ sur D, alors $l \geq 0$.*

Attention : Dans le théorème 2, l'inégalité est large même si $f(x) > 0$ sur D.
Ainsi, par exemple, $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^* = D$, mais $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.

Corollaire :

$$\boxed{\left. \begin{array}{c} f(x) \leq g(x), \; \forall x \in D \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l' \end{array} \right\} \Longrightarrow l \leq l'}$$

Théorème 3 – *Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur D et que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$.*

Application : $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$

On vérifie en effet que $x\cos x \le \sin x \le x$ pour tout $x\in[0,\pi]$. Ainsi, en divisant par $x\neq 0$, il vient :

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1,\ \forall x\in]0,\pi].$$

Comme $\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}$ et que $\cos(-x)=\cos x$ pour tout $x\neq 0$, on en déduit que :

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1,\ \forall x\in[-\pi,0[\cup]0,\pi].$$

Or, $\lim_{x\to 0}\cos x=1$, donc le théorème 3 (dit "théorème d'encadrement") impose $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Théorème 4 – *Si* $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ *et* $\lim_{x\to x_0} g(x)=l'$ *alors*

- $\lim_{x\to x_0}[f(x)+\lambda g(x)]=l+\lambda l'$, $(\lambda\in\mathbb{R})$;
- $\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=ll'$;
- $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{l}{l'}$ *si* $l'\neq 0$.

Equivalent. En particulier, si $l=l'$, on a $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. On dit alors que f *est équivalent à* g en x_0 et on note $f\overset{x_0}{\sim} g$.
On vient ainsi de voir que $\sin x\overset{0}{\sim} x$.

Théorème 5 – *Soient f définie sur D et g définie sur D' tel que $f(D)\subset D'$. Alors :*

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to x_0} f(x)=l\\ \lim_{x\to l} g(x)=L\end{array}\right\}\Longrightarrow\left(\lim_{x\to l}(g\circ f)(x)=L\right),$$

où $g\circ f$ est la fonction définie pour tout $x\in D$ par $(g\circ f)(x)=g[f(x)]$.

Application : $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}}$

En effet, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $1-\cos x=2\sin^2(\frac{x}{2})$, donc $\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2$ pour tout $x\neq 0$. Or, $\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}=0$ et l'on vient de voir que $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$, donc $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}=1$ d'après le théorème 5. Ensuite,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2},$$

d'après le théorème 4, ce qui montre bien que $1-\cos x\overset{0}{\sim}\frac{1}{2}x^2$.

1.3 Limite infinie

1.3.1 Définition et exemples fondamentaux

Soit f une fonction numérique de domaine D et x_0 un point non isolé de D.
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si, à tout réel $M > 0$ arbitrairement choisi, on est capable d'associer un réel $\alpha > 0$ (qui dépend généralement de M) tel que

$$\underbrace{(x \in D \text{ et } |x - x_0| < \alpha)}_{x \in D \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[} \Longrightarrow \underbrace{(f(x) \geq M)}_{f(x) \in [M, +\infty[}.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
Dans le cas où elle existe, on admet que cette limite est unique.
La définition de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ est analogue.

Remarque. On vérifie facilement que :

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0\right).$$

Par contre, si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ ne tend pas forcément vers l'infini lorque x tend vers x_0. En effet, on a par exemple $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$ mais $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ alors que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.
En fait, on peut seulement écrire l'implication suivante :

$$\left(\lim_{x \to x_0} f(x) = 0\right) \Longrightarrow \left(\lim_{x \to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty\right).$$

De même que pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on dira que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si, à tout réel $M > 0$ arbitrairement choisi, on est capable d'associer un réel $X > 0$ (qui dépend généralement de M) tel que

$$\underbrace{(x \in D \text{ et } x > X)}_{x \in D \cap]X, +\infty[} \Longrightarrow \underbrace{(f(x) \geq M)}_{f(x) \in [M, +\infty[}.$$

Exemples.

— *Limite d'un polynôme quand* $|x| \to +\infty$.
Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. Alors, pour tout $x \neq 0$,

$$P(x) = a_n x^n \left[1 + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n} \frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{x^n}}_{\varepsilon(x)} \right],$$

avec $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$. Par suite, $P \overset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$ donc

$$\lim_{|x| \to +\infty} P(x) = \lim_{|x| \to +\infty} a_n x^n = \infty,$$

l'écriture $\lim\limits_{|x| \to +\infty} a_n x^n = \infty$ incluant l'une des situations suivantes :

— $a_n x^n$ tend vers $+\infty$, ce qui est le cas lorsque $a_n > 0$, que n est pair et que x tend vers $\pm\infty$, ainsi que lorsque $a_n > 0$, que n est impair et que x tend vers $+\infty$;
— $a_n x^n$ tend vers $-\infty$: ce qui est le cas lorsque $a_n < 0$, que n est pair et que x tend vers $\pm\infty$;
— $a_n x^n$ n'a pas de limite à l'infini mais $|a_n x^n|$ tend vers $+\infty$, ce qui est le cas lorsque n est impair et que x tend vers $\pm\infty$.

— *Limite d'une fraction rationnelle quand* $|x| \to +\infty$.
Soient $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, et $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, $m \in \mathbb{N}$, $b_m \neq 0$. D'après ce que l'on vient de voir,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n [1 + \varepsilon(x)]}{b_m x^m [1 + \eta(x)]},$$

avec $\lim\limits_{|x|\to+\infty} \varepsilon(x) = \lim\limits_{|x|\to+\infty} \eta(x) = 0$.
Par suite :

$$\frac{P}{Q} \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \text{ donc } \lim_{|x|\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \infty & \text{si } n > m. \end{cases}$$

1.3.2 Règles de calcul sur les limites infinies

Dans cette section, la notation $\lim f$ désigne aussi bien $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ et l'écriture $\lim f = \infty$ signifie que f tend vers $\pm\infty$ sans que l'on se préoccupe du signe de la limite.
Les principales règles de calcul sur les limites sont les suivantes :

(i)	$f(x) \leq g(x)$ sur D et $\lim f = +\infty$	$\Longrightarrow$	$\lim g = +\infty$
(ii)	$\lim f = +\infty$ et $\lim g = +\infty$	$\Longrightarrow$	$\lim(f+g) = +\infty$
(iii)	$\lim f = \infty$ et $\lim g = \infty$	$\Longrightarrow$	$\lim(fg) = \infty$
(iv)	$\lim f = \infty$ et $\lim g = l$	$\Longrightarrow$	$\lim(fg) = \infty$
(v)	$\lim f = \infty$ et $\lim g = l$	$\Longrightarrow$	$\lim \frac{f}{g} = \infty$
(vi)	$\lim f = l$ et $\lim g = \infty$	$\Longrightarrow$	$\lim \frac{f}{g} = 0$

On remarque que les opérations précédentes sur les limites infinies ne permettent pas de conclure dans les cas suivants :

$\lim f = +\infty$ et $\lim g = -\infty$, $\lim(f+g) =?$ (indétermination $\infty - \infty$)
$\lim f = \infty$ et $\lim g = 0$, $\lim(fg) =?$ (indétermination $\infty \times 0$)
$\lim f = \infty$ et $\lim g = \infty$, $\lim \frac{f}{g} =?$ (indétermination $\frac{\infty}{\infty}$)
$\lim f = 0$ et $\lim g = 0$, $\lim \frac{f}{g} =?$ (indétermination $\frac{0}{0}$)

Dans ces cas indéterminés, la limite (si elle existe) est obtenue par un calcul explicite et non par l'application de théorèmes généraux.

Exemple. En encadrant $\frac{\sin x}{x}$ sur $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ par 1 et $\cos x$, on a levé l'indétermination "$\frac{0}{0}$" relative au calcul de $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$.

1.4 Continuité

1.4.1 Continuité en un point

Définition

Soit f une fonction définie sur D et soit $x_0 \in D$.
On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Remarque. Par définition de la limite, f est continue en x_0 s'il existe une fonction ε telle que

$$\forall x \in D,\ f(x) = f(x_0) + \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

Un exemple : la fonction sinus

Soient $f = \sin$ et $x_0 \in \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin x - \sin x_0 = 2 \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq |\sin x - \sin x_0| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \right| \leq |x - x_0|,$$

car on sait que $\sin y \leq y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
Par suite, le théorème d'encadrement impose $\lim\limits_{x \to x_0} |\sin x - \sin x_0| = 0$, donc la fonction $\sin$ est bien continue en x_0.

Cas de discontinuité

Une fonction donnée, f peut ne pas être continue en un point x_0 pour différentes raisons :
- *f n'est pas définie en x_0.*
  Par exemple, $x_0 = 0$ et $f(x) = \frac{1}{x}$.
- *f est définie en x_0 et possède une limite $l \neq f(x_0)$ en ce point.*
- *f ne possède pas de limite en x_0.*
  Deux cas peuvent se présenter :
  - f ne possède pas de limite à gauche ou à droite en x_0.
    Par exemple, $x_0 = 0$ et $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.
  - f possède une limite à gauche et une limite à droite en x_0, qui sont distinctes.
    Par exemple, $x_0 = n \in \mathbb{Z}$ et $f(x) = E(x)$. On a en effet :

$$\underbrace{\lim_{x \overset{<}{\to} n} f(x)}_{n-1} \neq \underbrace{\lim_{x \overset{>}{\to} n} f(x)}_{f(n)=n}.$$

Par définition, on dira que f est continue à droite (resp. à gauche) en x_0 si :

$$\begin{cases} (a) & f \text{ est définie en } x_0 \\ (b) & \lim\limits_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0) \ \text{(resp. } \lim\limits_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)\text{)}. \end{cases}$$

On remarque ainsi que :

$$\boxed{(f \text{ est continue en } x_0) \iff (f \text{ est continue à droite et à gauche en } x_0)}$$

Prolongement par continuité

Soit une fonction f non définie en un point x_0, mais qui possède une limite en x_0, c'est-à-dire qui possède une limite à droite et une limite à gauche en ce point, qui sont égales :

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

La fonction f n'est pas continue en x_0 car elle n'est pas définie en ce point.
Mais la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ l & \text{si } x = x_0, \end{cases}$ elle, est continue en x_0. De plus, g est coïncide avec f partout où la fonction f est définie. C'est pourquoi, on dit que "g réalise un prolongement de f par continuité".

Exemples.

1. Soient $x_0 = 0$ et $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
   Comme $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, la fonction $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ prolonge f par continuité.
2. Soient $x_0 = 0$ et $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Comme

   $$\underbrace{\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)}_{-1} \neq \underbrace{\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)}_{1},$$

   il n'est pas possible de prolonger cette fonction par continuité en 0.

Opérations sur les fonctions continues

Des théorèmes utilisés pour le calcul des limites, on déduit facilement les règles suivantes :

(i)	f et g sont continues en x_0	$\Longrightarrow$	$f+g$ et λf, $\lambda \in \mathbb{R}$, sont continues en x_0
(ii)	f et g sont continues en x_0	$\Longrightarrow$	fg est continue en x_0
(iii)	f et g sont continues en x_0, $g(x_0) \neq 0$	$\Longrightarrow$	$\frac{f}{g}$ est continue en x_0
(iv)	f est continue en x_0, g est continue en $f(x_0)$	$\Longrightarrow$	$g \circ f$ est continue en x_0

Application. La fonction identité $x \mapsto x$ est continue en tout point x_0 de $\mathbb{R}$, donc, d'après (ii), $x \mapsto x^n$ est continue en x_0 pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Il résulte ainsi de (i) que tout polynôme est continu en x_0, et de (iii) que toute fraction rationnelle est continue en tout point de son ensemble de définition.

1.4.2 Continuité sur $[a, b]$

Définition

Une fonction f est dite continue sur $[a, b]$ si :

$$\begin{cases} (a) & f \text{ est continue en tout point } x_0 \in]a, b[; \\ (b) & f \text{ est continue à droite en } x = a \text{ et à gauche en } x = b. \end{cases}$$

Image d'un intervalle fermé par une fonction continue

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
L'image de $[a, b]$ par f est $f([a, b]) = \{f(x),\ x \in [a, b]\}$.
Elle est caractérisée par le théorème suivant :

THÉORÈME 6 – *$f([a, b])$ est un intervalle fermé $[m, M]$.*

Ce théorème (admis) donne en fait 3 informations distinctes :

1. *f est bornée sur $[a, b]$.*
   Cela signifie que :
   — f est majorée sur $[a, b]$: il existe $M_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M_0$ pour tout $x \in [a, b]$.
   Le réel M_0 est un majorant de f sur $[a, b]$. Il n'est pas unique (car $M_0 + 1$ est également un majorant de f sur $[a, b]$). On montre que l'ensemble des majorants de f sur $[a, b]$ possède un plus petit élément, appelé "borne supérieure de f sur $[a, b]$". On la note

   $$M = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \text{ ou bien } M = \sup(f([a, b]).$$

   Ainsi, par exemple, $\sup(\{1\}) = 1$ et $\sup([0, 1]) = \sup([0, 1[) = 1$.
   On peut remarquer que $\sup_{x \in [a,b]} f(x)$ n'appartient pas forcément à $f([a, b])$.
   — f est minorée sur $[a, b]$: il existe $m_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m_0$ pour tout $x \in [a, b]$.
   Le réel m_0 est un minorant de f sur $[a, b]$. Il n'est pas unique (car $m_0 - 1$ est également un minorant de f sur $[a, b]$). On montre que l'ensemble des minorants de f sur $[a, b]$ possède un plus grand élément, appelé "borne inférieure de f sur $[a, b]$". On la note

   $$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \text{ ou bien } m = \inf(f([a, b]).$$

   Ainsi, par exemple, $\inf(\{1\}) = 1$ et $\inf([0, 1]) = \inf(]0, 1]) = 0$.
   On peut à nouveau remarquer que $\inf_{x \in [a,b]} f(x)$ n'appartient pas forcément à $f([a, b])$ non plus.
   Ainsi, dans le cas particulier où $f(x) = x^2$ et $[a, b] = [-1, 1]$, par exemple, on a $m = 0$ et $M = 1$.

2. *f atteint ses bornes.*
   Cela signifie qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ (pas forcément unique) tel que $f(\alpha) = m$ ainsi que $\beta \in [a, b]$ (pas forcément unique non plus) tel que $f(\beta) = M$.
   Ainsi, en prenant à nouveau $a = -1$, $b = 1$ et $f(x) = x^2$, on a $f([a, b]) = [0, 1]$, et l'on remarque bien que $m = 0 = f(0)$ et $M = 1 = f(\pm 1)$.
   Par contre, si l'intervalle est ouvert, $f(] - 1, 1[) = [0, 1[$, et l'on constate que $M = 1$ n'est égal à aucune image $f(x)$ pour $x \in] - 1, 1[$.

3. *Toute valeur $\mu \in [m, M]$ est l'image d'au moins un $x \in [a, b]$.*
   On résume cette phrase en disant que "f est une surjection de $[a, b]$ sur $[m, M]$".

1.4.3 Fonction réciproque

Rappels et définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si x_1 et x_2 sont deux valeurs distinctes de I, on appelle taux de variation de f de x_1 à x_2, le rapport

$$T_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Par définition, si

- $T_f(x_1, x_2) \geq 0$ pour tout couple (x_1, x_2) de $I \times I$, f est dite croissante sur I (strictement croissante si $T_f > 0$) ;
- $T_f(x_1, x_2) \leq 0$ pour tout couple (x_1, x_2) de $I \times I$, f est dite décroissante sur I (strictement décroissante si $T_f < 0$).

Une fonction monotone sur I est une fonction qui est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

Remarque. Il résulte facilement des définitions précédentes que :

$$(f \text{ est croissante sur } I) \Longleftrightarrow (\forall (x_1, x_2) \in I \times I,\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)),$$

alors que

$$(f \text{ est décroissante sur } I) \Longleftrightarrow (\forall (x_1, x_2) \in I \times I,\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Définition de f^{-1}

Soit f une fonction continue et strictement croissante sur $[a, b]$.
Alors, d'après le théorème 6, $f([a, b]) = [m, M] = [f(a), f(b)]$.
L'application f est donc *surjective* de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
De plus, comme elle est strictement croissante sur $[a, b]$, elle vérifie :

$$\forall (x, x') \in [a, b]^2,\ x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

On dit alors que f est *injective* sur $[a, b]$.
Nous voyons ainsi que tout $y \in [f(a), f(b)]$ possède un unique antécédent x dans $[a, b]$: f réalise une *bijection* de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.
Plus généralement, on démontre que :

Toute fonction f continue et strictement monotone sur I définit une bijection de I sur $f(I)$.

Ainsi, quel que soit $y \in f(I)$, il existe un unique antécédent $x \in I$ tel que $f(x) = y$. On peut donc définir une bijection de $f(I)$ sur I, notée f^{-1} telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} y = f(x) \\ x \in I \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = f^{-1}(y) \\ y \in f(I). \end{array} \right.$$

f^{-1} est la *fonction réciproque* de f.
On a bien sûr :

$$\left\{ \begin{array}{ll} f^{-1} \circ f = Id_I & (\text{c'est-à-dire } (f^{-1} \circ f)(x) = x,\ \forall x \in I) \\ f \circ f^{-1} = Id_{f(I)} & (\text{c'est-à-dire } (f \circ f^{-1})(y) = y,\ \forall y \in f(I)). \end{array} \right.$$

Exemple. Soient $I = \mathbb{R}_+$ et $f(x) = x^2$. La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$, et

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{y} \\ y \in \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Ici, on voit donc que f^{-1} est la fonction racine carrée.

Attention : il ne faut pas confondre la fonction réciproque f^{-1} avec $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$. Ces deux fonctions n'ont, en général, rien à voir entre elles. Ainsi, sur l'exemple précédent, on voit bien que $\sqrt{x}$ n'est pas égal à $\frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Propriétés de f^{-1}

Les trois principales propriétés sont les suivantes :

— *f^{-1} est monotone de même sens de variation que f.*
En effet, pour tout $(y, y') \in f(I)^2$ vérifiant $y \neq y'$, il existe x et x' (distincts) dans I tels que $y = f(x)$, $y' = f(x')$, et on a alors :

$$T_{f^{-1}}(y, y') = \frac{f^{-1}(y') - f^{-1}(y)}{y' - y} = \frac{x' - x}{f(x') - f(x)} = \frac{1}{T_f(x, x')}.$$

— *f^{-1} est continue sur $f(I)$.*
Ce résultat est admis.

— *La courbe représentative de f^{-1} se déduit de celle de f par une symétrie par rapport à la première bissectrice.*
En effet, un point M appartient à la courbe représentative C de f s'il existe $x \in I$ tel que $M = (x, f(x))$. De même, un point M' appartient à la courbe représentative C' de f^{-1} s'il existe $y \in f(I)$ tel que $M' = (y, f^{-1}(y))$. Or, comme $y \in f(I)$, on a $y = f(x)$ pour un certain $x \in I$, donc $M' = (f(x), x)$ est le symétrique par rapport à la première bissectrice du point $M = (x, f(x))$ de C.

1.4.4 Résolution de $f(x) = 0$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
Si $f(a)f(b) < 0$, il existe au moins un réel $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = 0$.
En effet, supposons pour simplifier que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. En vertu du théorème 6, on a $f([a, b]) = [m, M]$, donc les inégalités $m \leq f(a)$ et $M \geq f(b)$ impliquent $m < 0$ et $M > 0$, ce qui montre que $0 \in f([a, b])$. Le cas $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ se traite de façon analogue.
Enfin, si l'on suppose de plus que f est strictement monotone sur $[a, b]$, cette solution est unique.

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est strictement monotone sur } [a, b] \\ f(a)f(b) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (f(x) = 0 \text{ possède une unique solution } r \in [a, b].)}$$

Chapitre 2

Dérivation

2.1 Généralités

Soient I un intervalle ouvert, x_0 un point de I et f une fonction définie sur I.

2.1.1 Définition

On dit que f est dérivable en x_0 si,

$$\lim_{x \to x_0} T_f(x_0, x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, le réel L est appelé "nombre dérivé de f en x_0" et est noté $f'(x_0)$.

Exemple. La fonction $\cos$ est dérivable en n'importe quel point $x_0 \in \mathbb{R}$.
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos x = \cos\left[(x - x_0) + x_0\right] = \cos x_0 \cos(x - x_0) - \sin x_0 \sin(x - x_0)$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0\},\ T_{\cos}(x_0, x) = \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \cos x_0 \frac{\cos(x - x_0) - 1}{x - x_0} - \sin x_0 \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0}.$$

Or, on a vu dans le chapitre "Limites et continuité" que $\sin y \overset{0}{\sim} y$ et $1 - \cos y \overset{0}{\sim} \frac{y^2}{2}$, donc $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x - x_0)}{x - x_0} = 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{1 - \cos(x - x_0)}{x - x_0} = 0$.
Par suite, on a finalement :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = -\sin x_0,$$

ce qui prouve bien que la fonction cosinus est dérivable en x_0 de nombre dérivé $(-\sin x_0)$.

2.1.2 Autre formulation

Si la fonction f est dérivable en x_0, alors on a, par définition, $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \underbrace{\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right)}_{\varepsilon(x - x_0)} = 0.$

Ainsi,

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x - x_0) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0.$$

Réciproquement, il est clair que toute fonction f satisfaisant l'égalité précédente est dérivable en x_0, de nombre dérivé $f'(x_0)$.
On a donc l'équivalence suivante :

$$\boxed{\begin{pmatrix} f \text{ est dérivable en } x_0 \\ \text{de nombre dérivé } f'(x_0) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \text{il existe une fonction } x \mapsto \varepsilon(x-x_0) \text{ telle que :} \\ \bullet\ \forall x \in I,\ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x-x_0) \\ \bullet\ \lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0 \end{pmatrix}}$$

2.1.3 Interprétation géométrique

Soit $C = \{M = (x, f(x)),\ x \in I\}$ la courbe représentative de f.
D'après l'équivalence précédente, toute fonction f dérivable en x_0 vérifie

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)] = (x-x_0)\varepsilon(x-x_0) \overset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

On voit donc que la droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$

qui passe par le point $M_0 = (x_0, f(x_0)) \in C$, "approche" la courbe C au point M_0.
Cette droite s'appelle la tangente à C en M_0.

2.1.4 Lien avec la continuité

Si f est dérivable en x_0, l'équivalence précédente montre que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ce qui prouve que f est continue en x_0 :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } x_0 \Longrightarrow f \text{ est continue en } x_0.}$$

Attention : la réciproque est fausse. Autrement dit, il existe des fonctions continues en x_0 qui ne sont pas dérivables en ce point.
Ainsi, la fonction $f(x) = |x|$, définie sur $\mathbb{R}$ est continue en $x_0 = 0$. Mais elle n'est pas dérivable en ce point car la taux de variation $T_f(0, x)$ n'a pas de limite en 0. En effet :

$$\lim_{x \to 0^-} \underbrace{\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}}_{\frac{-x}{x}} = -1 \neq \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}}_{\frac{x}{x}} = 1.$$

2.1.5 Cas de non dérivabilité

— $T_f(x_0, x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ possède une limite à gauche et une limite à droite, qui sont distinctes.
On pose alors :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0), & \text{dérivée à gauche de } f \text{ en } x_0, \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_d(x_0), & \text{dérivée à droite de } f \text{ en } x_0. \end{cases}$$

La courbe C possède une demi-tangente à gauche et une demi-tangente à droite en M_0. On dit que M_0 est un "point anguleux" de C.
Ainsi, dans l'exemple précédent on a vu que l'origine O est point anguleux de la courbe représentative de la fonction $f(x) = |x|$.

— $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$.
Par abus de langage, on dit que la courbe C possède une tangente verticale en M_0.
C'est le cas notamment pour la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

car elle vérifie :

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

— $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ne possède pas de limite en x_0.
C'est le cas par exemple pour la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

puisque l'on sait que $\frac{f(x)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

2.2 Fonction dérivée

2.2.1 Définition

Soit f une fonction numérique définie sur I et dérivable en tout point de I. Alors, l'application

$$\begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x), \end{array}$$

notée f', est appelée dérivée de f.

2.2.2 Dérivées successives

Si la fonction f' est également dérivable sur I, on définit la dérivée seconde de f, notée f'', par $f'' = (f')'$. Plus généralement, les dérivées successives (si elles existent) de f sont notées : $f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a bien sûr :

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

L'ensemble des fonctions f dont la dérivée $n^{\text{ième}}$, $n \geq 1$, est définie en tout point de I est noté $D^n(I)$.
Bien entendu, on a

$$D^n(I) \subset D^{n-1}(I).$$

Si $f \in D^n(I)$, alors $f^{(n)}$ existe donc $f^{(n-1)}$ est continue et nécessairement, $f^{(p)}$ est continue pour tout $p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Si $f^{(n)}$ est une fonction continue sur I, alors f est dite de classe C^n sur I, et on note

$$f \in C^n(I).$$

Si f est indéfiniment dérivable sur I, f est dite de classe C^∞ sur I, et on note

$$f \in C^\infty(I).$$

Remarque. Si $f \in C^n(I)$ alors $f^{(n-1)}$ est dérivable, donc continue sur I. Par suite, $f \in C^{n-1}(I)$ et l'on a l'inclusion suivante :

$$C^n(I) \subset C^{n-1}(I).$$

2.2.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Opérations algébriques

THÉORÈME 1 – *Soient f et g deux fonctions dérivables sur I. Alors, λf, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f+g$ et fg sont dérivables sur I et,*

$$\boxed{\forall x \in I,\ (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x),\ (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x),\ (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}$$

De plus, $\frac{f}{g}$ est dérivable en tout point $x \in I$ tel que $g(x) \neq 0$ et,

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}}$$

Formule de Leibnitz

Si f et g sont deux fonctions de classe C^n sur I, $n \geq 2$, on démontre (par récurrence sur n) que fg est également de classe C^n sur I, et on a de plus :

$$\boxed{\forall x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)}$$

Composition

THÉORÈME 2 – *Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ dérivable en x_0 et,*

$$\boxed{(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \times f'(x_0)}$$

Exemple. La fonction $x \overset{h}{\mapsto} \cos(x^2)$ s'écrit $h(x) = (g \circ f)(x)$ avec $g(y) = \cos y$ et $f(x) = x^2$. Or, f et g sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}$ et,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x \text{ alors que } \forall y \in \mathbb{R},\ g'(y) = -\sin y.$$

Par suite, $h'(x) = -\sin(x^2) \times (2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dérivée de la réciproque

THÉORÈME 3 – *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I. Si f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et,*

$$\boxed{(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(y_0)]}}$$

Démonstration. Soient $y_0 = f(x_0)$ et $y = f(x)$ pour $x \in I$. On a

$$T_{f^{-1}}(y_0, y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{T_f(x_0, x)}.$$

Comme f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$, on a bien

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{T_f(x_0, x)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Par suite, f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. ■

Exemple. La réciproque de la fonction $f(x) = x^2$ restreinte à $\mathbb{R}_+$ est la fonction racine carrée. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en entier, mais $f'(x) = 2x$ est non nulle si et seulement si $x \neq 0$. Par suite, f^{-1} est dérivable en tout $y = x^2 > 0$, et

$$\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \ \left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Dérivée des fonctions usuelles

A l'aide des résultats obtenus précédemment, on obtient l'expression de la dérivée des fonctions usuelles suivantes :

$(x^\alpha)'$	$=$	$\alpha x^{\alpha-1}, \ \alpha \in \mathbb{R}$	$(\ln\|x\|)'$	$=$	$\dfrac{1}{x}$	$(a^x)'$	$=$	$\ln a \times a^x, \ a > 0$
$\sin' x$	$=$	$\cos x$	$\cos' x$	$=$	$-\sin x$	$\tan' x$	$=$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(\mathrm{e}^x)'$	$=$	e^x	$\mathrm{ch'x}$	$=$	shx	$\mathrm{sh'x}$	$=$	chx
$\arcsin' x$	$=$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos' x$	$=$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan' x$	$=$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

2.3 Formule des accroissements finis et applications

2.3.1 Formule des accroissements finis

THÉORÈME 4 – *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe (au moins) un réel $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Ce théorème, appelé théorème des accroissements finis (noté TAF en abrégé), est admis.

2.3.2 Application au sens de variation des fonctions

THÉORÈME 5 – *Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, et si $f'(x)=0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est constante sur $[a,b]$.*

Démonstration. Soit $x \in]a,b]$. La fonction f est continue sur $[a,x]$ et elle est dérivable sur $]a,x[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,x[$ tel que

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)=0.$$

Par suite, $f(x)=f(a)$ pour tout $x \in]a,b]$, ce qui montre bien que f est constante sur $[a,b]$. ■

THÉORÈME 6 – *Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, et si $f'(x)>0$ pour tout $x \in]a,b[$, alors f est croissante sur $[a,b]$.*

Démonstration. Soient $(x,x') \in]a,b[^2$ tels que $x<x'$. La fonction f est continue sur $[x,x']$ et dérivable sur $]x,x'[$, donc le théorème des accroissements finis s'applique : il existe $c \in]x,x'[$ tel que

$$f(x')-f(x)=f'(c)(x'-x).$$

Par hypothèse, $f'(c)>0$, donc $T_f(x,x')>0$ ■

Par une démonstration analogue à la précédente, on montre plus généralement que si f est dérivable sur un *intervalle* I, on a les équivalences suivantes :

$\forall x \in I,\ f'(x)=0$	$\Longleftrightarrow$	$\forall x \in I,\ f(x)=C$
$\forall x \in I,\ f'(x)>0$	$\Longleftrightarrow$	f est strictement croissante sur I
$\forall x \in I,\ f'(x)\geq 0$	$\Longleftrightarrow$	f est croissante sur I
$\forall x \in I,\ f'(x)<0$	$\Longleftrightarrow$	f est strictement décroissante sur I
$\forall x \in I,\ f'(x)\leq 0$	$\Longleftrightarrow$	f est décroissante sur I

2.3.3 Extréma locaux d'une fonction

Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que le point $x_0 \in I$ est un maximum local de f s'il existe un réel $\alpha>0$ tel que

$$\forall x \in I,\ (x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[) \Longrightarrow (f(x) \geq f(x_0))\,.$$

Autrement dit : f admet un maximum local en x_0 si $f(x)\geq f(x_0)$ sur un voisinage de x_0.
De même, on dit le point $x_0 \in I$ est un minimum local de f, s'il existe un réel $\alpha>0$ tel que

$$\forall x \in I,\ (x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[) \Longrightarrow (f(x) \leq f(x_0))\,.$$

Les maxima ou minima locaux de f sont appelés extréma locaux de f.

Recherche des extréma locaux

Supposons que f est dérivable sur I.

THÉORÈME 7 – *Les extréma locaux de f sont à rechercher parmi les zéros de f'. Autrement dit :*

$$(x_0 \text{ est un extrémum local de } f) \Longrightarrow (f'(x_0) = 0)$$

Démonstration. Supposons que x_0 est un maximum local de f, le cas d'un minimum local se traitant de façon totalement analogue.
Supposons un instant que $f'(x_0) \neq 0$. Comme la fonction f est dérivable en x_0, il existe une fonction $x \mapsto \varepsilon(x - x_0)$ telle que

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)[f'(x_0) + \varepsilon(x - x_0)], \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0.$$

Or, x_0 est maximum local de f, donc il existe $\alpha_1 > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap]x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1[, \; f(x) \geq f(x_0).$$

Mais, comme $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap]x_0 - \alpha_2, x_0 + \alpha_2[, \; |\varepsilon(x - x_0)| \leq \frac{1}{2}|f'(x_0)|.$$

Par suite,

$$\forall x \in I \cap]x_0 - \alpha_2, x_0 + \alpha_2[, \; |f'(x_0) + \varepsilon(x - x_0)| \geq |f'(x_0)| - \underbrace{|\varepsilon(x - x_0)|}_{\leq \frac{1}{2}|f'(x_0)|} \geq \frac{1}{2}|f'(x_0)|.$$

Posons maintenant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2) > 0$. D'après ce qui précède, $f'(x_0) + \varepsilon(x - x_0)$ est non nul sur $I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, donc $x \mapsto (x - x_0)[f'(x_0) + \varepsilon(x - x_0)]$ ne peut avoir un signe constant sur $I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. Ce qui contredit l'inégalité

$$f(x) \geq f(x_0), \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[.$$

Par suite, on a forcément $f'(x_0) = 0$. ■

Attention : la condition $f'(x_0) = 0$ ne suffit pas à établir que x_0 est un extrémum local de f.

- En effet, la fonction $f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en entier et sa dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule en $x_0 = 0$ bien que le signe de $f(x) - f(0)$ soit celui de x. Ce phénomène provient de ce que f' ne change pas de signe au voisinage de x_0.
- De plus, il faut prendre garde que le théorème ne s'applique pas lorsque f n'est pas dérivable en x_0 Ainsi, $f(x) = |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée partout non nulle, mais elle admet un minimum local en $x_0 = 0$.
- Enfin, les extrémités de I peuvent être des extréma locaux de f sur I sans que la dérivée de f ne s'annule en ce point. C'est notamment le cas pour $f(x) = x$ et $I = [0, 1]$. La dérivée de f ne s'annule pas sur I, mais 0 et 1 sont respectivement minimum et maximum de f sur I.

Conclusion. Les extréma locaux d'une fonction f définie sur I sont donc à rechercher parmi :
— les extrémités de I,
— les points en lesquels f n'est pas dérivable,
— les points en lesquels f' s'annule en *changeant de signe.*

2.3.4 Inégalité des accroissements finis

THÉORÈME 8 – *Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$ et telles que $|f'(x)| \leq g'(x)$ pour tout $x \in]a,b[$, alors*

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a).$$

Démonstration. Pour tout $x \in [a,b]$, posons $h^{\pm}(x) = g(x) - g(a) \pm (f(x) - f(a))$. La fonction $h^{\pm}$ est dérivable sur $]a,b[$, et,

$$\forall x \in]a,b[,\ (h^{\pm})'(x) = g'(x) \pm f'(x) \geq g'(x) - |f'(x)| \geq 0.$$

La fonction $h^{\pm}$ est donc croissante sur $[a,b]$, ce qui impose $h^{\pm}(b) \geq h^{\pm}(a)$. Comme $h^{\pm}(a) = 0$ et $h^{\pm}(b) = g(b) - g(a) \pm (f(b) - f(a))$, on a

$$g(b) - g(a) \pm (f(b) - f(a)) \geq 0,$$

ce qui montre bien :

$$g(b) - g(a) \geq |f(b) - f(a)| \ \blacksquare$$

2.4 Formules de Taylor

Pour toute fonction f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, on a vu dans la section précédente qu'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Nous allons voir maintenant que cette formule peut être généralisée.

2.4.1 Formule de Taylor-Lagrange

Enoncé du résultat

THÉORÈME 9 – *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe C^n sur $[a,b]$, dérivable à l'ordre $n+1$ sur $]a,b[$ (en résumé : $f \in C^n([a,b]) \cap D^{n+1}(]a,b[)$).*
Alors, il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Cette formule s'appelle formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$.
Le terme $\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ est le reste de Lagrange à l'ordre $n+1$.

Autre écriture. Posons $h = b - a$. Comme $c \in]a, b[=]a, a+h[$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $c = a + \theta h$. La formule précédente devient ainsi :

$$f(a+h) = \underbrace{f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)}_{\text{polynôme de Taylor de } f \text{ en } a \text{ à l'ordre } n} + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Application : inégalité de Taylor-Lagrange

Si f satisfait les hypothèses du théorème 9, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(a+h) - \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(a)\right) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

Si, de plus, il existe $M \geq 0$ tel que $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ pour tout $x \in]a, a+h[$, alors

$$\boxed{\left| f(a+h) - \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(a)\right)\right| \leq M \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Cette inégalité, dite de Taylor-Lagrange, montre que l'erreur commise en approximant $f(a+h)$ par le polynôme de Lagrange $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(a)$ est, sous l'hypothèse précédente, inférieure à $\dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}M$.

Exemple. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\exp$ est indéfiniment dérivable sur $[0, h]$, et

$$\forall p \in \mathbb{N},\ (\exp)^{(p)}(x) = \exp x.$$

Par suite,

$$\forall x \in]0, h[,\ |(\exp)^{(n+1)}(x)| = \mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^{|h|}.$$

On en déduit :

$$\left| \mathrm{e}^h - \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{h^p}{p!}\right)\right| \leq \mathrm{e}^{|h|} \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.$$

2.4.2 Formule de Taylor-Young

La formule de Taylor-Lagrange est une formule "globale" car elle est valable sur l'intervalle $[a, a+h]$. On dispose, sous des conditions plus faibles que celles du théorème 9, d'une formule "locale", appelée formule de Taylor-Young, et qui fait l'objet du théorème (que l'on admettra) suivant.

THÉORÈME 10 – *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f une fonction de classe C^{n-1} sur $[a, a+h]$, telle que $f^{(n)}(a)$ existe. Alors, il existe une fonction $h \mapsto \varepsilon(h)$ telle que :*

$$\begin{cases} (i) & f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^n}{n!}\varepsilon(h), \\ (ii) & \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0. \end{cases}$$

La formule de Taylor-Young assure de l'existence d'un polynôme $P_n(h) = \sum_{p=0}^{n} \frac{h^p}{p!} f^{(p)}(a)$ de degré inférieur ou égal à n, qui satisfait :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - P_n(h)}{h^n} = 0.$$

L'information fournie par cette formule est valable au voisinage de a. C'est pourquoi, on parle de "formule locale".

Exemple. Choisissons $a = 0$, $f = \sin$ et fixons n dans $\mathbb{N}^*$. La fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\sin^{(p)}(x) = \sin\left(x + p\frac{\pi}{2}\right).$$

Par suite,

$$\sin^{(p)}(0) = \sin\left(p\frac{\pi}{2}\right).$$

Ainsi, en prenant $n = 4$, on a :

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h - (h - \frac{h^3}{6})}{h^4} = 0,$$

ce qui montre que $\sin h$ peut être approché par $h - \frac{h^3}{6}$ au voisinage de 0.

Chapitre 3

Fonctions logarithme, exponentielle et hyperboliques

3.1 Quelques préliminaires concernant la fonction "puissance"

Soit $q \in \mathbb{N}^*$.

3.1.1 Fonction puissance "entière"

Il est bien connu que la fonction $x \overset{f_q}{\mapsto} x^q$ est une fonction continue et strictement croissante sur le domaine

$$D_q = \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{si } q \text{ est pair} \\ \mathbb{R} & \text{si } q \text{ est impair.} \end{cases}$$

C'est donc une bijection de D_q sur

$$I_q = f(D_q) = \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \text{si } q \text{ est pair} \\ \mathbb{R} & \text{si } q \text{ est impair.} \end{cases}$$

Cela permet de définir la fonction réciproque $f_q^{-1} : I_q \to D_q$ de f_q, qui vérifie par définition :

$$\begin{cases} (i) & f_q^{-1} \circ f_q = Id_{D_q} & \text{soit} & \forall x \in D_q,\ f_q^{-1}\left[f_q(x)\right] = f_q^{-1}(x^q) = x \\ (ii) & f_q \circ f_q^{-1} = Id_{I_q} & \text{soit} & \forall y \in I_q,\ f_q\left[f_q^{-1}(y)\right] = \left[f_q^{-1}(y)\right]^q = y. \end{cases}$$

3.1.2 Fonction puissance "fractionnaire"

Fonction racine $q^{\text{ième}}$

Les égalités (i) et (ii) précédentes incitent évidemment à représenter $f_q^{-1}(y)$ par le symbole $y^{\frac{1}{q}}$ (c'est une notation). Comme la fonction f_q^{-1}, appelée fonction racine $q^{\text{ième}}$, est également notée $\sqrt[q]{\cdot}$, on a donc :

$$\forall y \in I_q,\ \sqrt[q]{y} = y^{\frac{1}{q}}.$$

Généralisation

Pour n'importe quel entier relatif p, il est maintenant naturel de définir $y^{\frac{p}{q}}$ pour tout $y \in I_p$ sauf éventuellement en $y = 0$ lorsque $p \in \mathbb{Z}_-^*$, par la formule évidente suivante :

$$y^{\frac{p}{q}} = \left[y^{\frac{1}{q}}\right]^p.$$

Nous avons donc défini de façon rigoureuse la fonction $y \mapsto y^r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

Remarque concernant la dérivabilité : il est facile de vérifier (à l'aide du théorème de dérivation des fonctions réciproques) que la fonction $y \mapsto y^r$ précédente est dérivable sur son domaine de définition I et que sa dérivée s'écrit :

$$\forall y \in I,\ (y^r)' = ry^{r-1}.$$

Le cas irrationnel

Si l'on cherche à généraliser encore la définition précédente il faut envisager le cas où r est irrationnel (c'est-à-dire que $r \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$). Pour cela, on doit préalablement introduire les fonctions logarithme népérien et exponentielle.

3.2 Fonction logarithme népérien

3.2.1 Définition

Notion de primitive

Si f est une fonction définie sur un intervalle I, on appelle primitive de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que

$$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x).$$

Lorsque f est continue sur I, on montre (ce sera fait dans le cours sur l'intégration) qu'elle possède une infinité de primitives sur I. Si F désigne l'une d'entre-elles, l'ensemble des primitives de f sur I est $x \mapsto F(x) + C$, où $C \in \mathbb{R}$. On note $\int f(x)dx$ cet ensemble.
Ainsi, f possède une unique primitive sur I qui s'annule en $x_0 \in I$:

$$x \mapsto F(x) - F(x_0).$$

On la note $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$.

Cas de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On appelle "logarithme népérien", et on note $\ln$, la primitive de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en $x = 1$. Autrement dit :

$$\boxed{\forall x > 0,\ \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}}$$

ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} \forall x > 0,\ \ln' x = \frac{1}{x}, \\ \ln 1 = 0. \end{cases}$$

3.2.2 Propriétés

Soient $a \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi_a : a \mapsto ax$ et $\varphi_a = \ln \circ \psi_a$, c'est-à-dire :

$$\forall x > 0,\ \varphi_a(x) = (\ln \circ \psi_a)(x) = \ln[\psi_a(x)] = \ln(ax).$$

On a donc

$$\forall x > 0,\ \varphi_a'(x) = (\ln' \circ \psi_a)(x) \times \psi_a'(x) = \frac{\psi_a'(x)}{\psi_a(x)} = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}.$$

Les fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto \ln(ax)$ sont donc deux primitives de $\mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ \ln(ax) = \ln x + C.$$

En particulier, si $x = 1$, on obtient $\ln a = C$:

$$\ln(ax) = \ln a + \ln x.$$

Conséquences.

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^*,\ \begin{cases} \ln(ab) &= \ln a + \ln b \\ \ln(\frac{a}{b}) &= \ln a - \ln b \\ \ln(a^\alpha) &= \alpha \ln a, \qquad \alpha \in \mathbb{Q} \end{cases}}$$

3.2.3 Etude de $\ln$

La fonction $\ln$ est dérivable (donc continue) sur $\mathbb{R}_+^*$, et

$$\forall x > 0,\ \ln' x = \frac{1}{x} > 0.$$

Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a de plus

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$$

En effet, A étant un réel strictement positif quelconque, posons $n = E(\frac{A}{\ln 2}) + 1$. Alors,

$$\forall x > 2^n,\ \ln x > \underbrace{\ln 2^n}_{> n \ln 2} > A.$$

Par suite, on a bien touvé $X = 2^n$ tel que $\ln x > A$ dès que $x > X$.

Recherche de $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}$**,** $\alpha\in\mathbb{Q}_+$**.** Pour tout $t\geq 1$, il est bien connu que

$$1\leq\sqrt{t}\leq t\Rightarrow\frac{1}{t}\leq\frac{1}{\sqrt{t}},$$

donc, pour tout $x\geq 1$, on a

$$\underbrace{\int_1^x\frac{dt}{t}}_{\ln x}\leq\underbrace{\int_1^x\frac{dt}{\sqrt{t}}}_{2(\sqrt{x}-1)}.$$

Par suite, on a montré :

$$\forall x\geq 1,\ 0\leq\frac{\ln x}{x}\leq\underbrace{2\frac{\sqrt{x}-1}{x}}_{\overset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0}.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$ le théorème d'encadrement implique

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0,$$

d'où l'on déduit :

$$\boxed{\forall\alpha\in\mathbb{Q}_+^*,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0}$$

Conséquence.

$$\boxed{\begin{cases}\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty\\ \lim_{x\to0^+}x^\alpha\ln x=0,\quad\forall\alpha\in\mathbb{Q}_+^*\end{cases}}$$

Démonstration.

$$\lim_{x\to0^+}x^\alpha\ln x\overset{y=\frac{1}{x}}{=}\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(\frac{1}{y})}{y^\alpha}=-\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y^\alpha}=0.\ \blacksquare$$

Définiton de e**.** Comme $\ln$ (restreinte à $[1,+\infty[$) est continue et strictement croissante de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$, il existe un unique réel strictement positif, noté e, tel que

$$\ln e=1.$$

On montre que $e\approx 2,718$.

3.3 Fonction exponentielle

3.3.1 Définition

La fonction $\ln$ est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$: il existe donc une bijection réciproque de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ appelée "fonction exponentielle" et notée $\exp$:

$$\begin{cases}y=\exp x\\ x\in\mathbb{R}\end{cases}\iff\begin{cases}x=\ln y\\ y\in\mathbb{R}_+^*,\end{cases}$$

d'où l'on tire évidemment

$$\begin{cases} \forall y \in \mathbb{R}_+^*, & \exp(\ln y) = y \\ \forall x \in \mathbb{R}, & \ln(\exp x) = x. \end{cases}$$

Conséquences.

— $\exp 0 = 1$ car $\ln 1 = 0$,

— $\exp 1 = e$ car $\ln e = 1$.

3.3.2 Propriétés

$$\boxed{\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x_1 + x_2) = \exp x_1 \times \exp x_2}$$

Démonstration.

$$\left.\begin{array}{lcl} y_1 = \exp x_1 & \Leftrightarrow & x_1 = \ln y_1 \\ y_2 = \exp x_2 & \Leftrightarrow & x_2 = \ln y_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_1 + x_2 = \ln(y_1 y_2) \Longrightarrow \underbrace{y_1 y_2}_{\exp x_1 \times \exp x_2} = \exp(x_1 + x_2). \blacksquare$$

Conséquences.

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{cases} \exp(a+b) & = & \exp a \times \exp b \\ \exp(a-b) & = & \frac{\exp a}{\exp b} \\ \exp(\alpha a) & = & (\exp a)^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Q} \end{cases}}$$

Remarque. En choisissant $a = 1$ dans la dernière égalité, il vient : $\exp \alpha = (\exp 1)^\alpha = e^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$.

3.3.3 Etude de la fonction exp

Cette fonction est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, elle y est dérivable, et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp' x = \frac{1}{\ln'[\exp x]} = \exp x.$$

Comportement en $\pm\infty$.

$$\boxed{\begin{array}{llll} \lim\limits_{x \to +\infty} \exp x = +\infty & & \lim\limits_{x \to -\infty} \exp x = 0 & \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\exp x}{x^\alpha} = +\infty, & \alpha \in \mathbb{Q} & \lim\limits_{x \to -\infty} |x|^\alpha \exp x = 0, & \alpha \in \mathbb{Q} \end{array}}$$

3.3.4 Fonctions exponentielles généralisées

Rappel

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On pose ensuite $I = \mathbb{R}$ si q est impair, $I = \mathbb{R}_+$ si q est pair. La fonction $f_q : x \mapsto x^q$ est continue et strictement croissante de I sur $f(I) = I$. Par suite, elle possède une fonction réciproque f_q^{-1} de I sur lui-même. Pour tout $x \in I$, on a donc :

$$(f_q^{-1}(x))^q = f_q^{-1}(x^q) = x.$$

C'est pourquoi on préfère noter $x^{\frac{1}{q}}$ à la place de $f_q^{-1}(x)$, de sorte que :

$$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^q = (x^q)^{\frac{1}{q}} = x.$$

Le réel $x^{\frac{1}{q}}$ s'appelle racine $q^{\text{ième}}$ de x.
Comme f_q est dérivable sur I et que $f_q'(x) = qx^{q-1} \neq 0$ pour tout $x \in I^* = I \backslash \{0\}$, la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ est dérivable sur I^*, et

$$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)' = \frac{1}{(f_q' \circ f_q^{-1})(x)} = \frac{1}{q(x^{\frac{1}{q}})^{q-1}}.$$

En posant alors, pour chaque $p \in \mathbb{Z}$:

$$\forall x \in I,\ x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p,$$

ce qui revient au passage à définir la fonction $x \mapsto x^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, on obtient finalement :

$$\left(x^{\frac{1}{q}}\right)' = \frac{1}{q}x^{-\frac{q-1}{q}} = \frac{1}{q}x^{\frac{1}{q}-1}.$$

Cette formule permet donc d'écrire, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$:

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

On va maintenant généraliser la définition de x^α aux réels α non rationnels.

Exposants non rationnels

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^\alpha = \exp[\alpha \ln x]}$$

Comme les fonctions $\exp$ et $\ln$ sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs, $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x > 0,\ (x^\alpha)' = \exp[\alpha \ln x] \times \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Conséquence nouvelle écriture de l'exponentielle. Si $x = e$, on a

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}, e^\alpha = \exp \alpha}$$

Généralisation. Soient I un intervalle, u et v deux fonctions définies sur I, la fonction u étant à valeurs strictement positives sur I ($u(x) > 0,\ \forall x \in I$). Par analogie avec ce qui vient dêtre fait, on pose

$$\forall x \in I,\ u(x)^{v(x)} = \exp[v(x) \times \ln u(x)] = \mathrm{e}^{v(x) \ln u(x)}.$$

3.3.5 Fonctions hyperboliques

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{shx} & = & \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{(fonction sinus hyperbolique)} \\ \mathrm{chx} & = & \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad \text{(fonction cosinus hyperbolique)} \end{array} \right.$$

On vérifie que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2\mathrm{x} = 1 + \mathrm{sh}^2\mathrm{x}}$$

et que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{lcl} \mathrm{sh}'\mathrm{x} & = & \mathrm{chx} \\ \mathrm{ch}'\mathrm{x} & = & \mathrm{shx} \end{array} \right.}$$

Chapitre 4

Intégration

4.1 Intégrale définie

4.1.1 Fonction intégrable

Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et *bornée* sur $[a, b]$.

Sommes de Darboux

Considérons une subdvision $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ telle que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Le diamètre de σ est, par définition, la longueur maximale entre deux points x_i consécutifs :

$$\delta(\sigma) = \max_{i \in \{0,1,\ldots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i).$$

Dans la suite, la subdivision σ considérée sera toujours choisie de telle façon que $\delta(\sigma) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Remarquons maintenant que la fonction f, qui est supposée bornée sur $[a, b]$, possède une borne inférieure m_i et une borne supérieure M_i sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$:

$$m_i = \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x).$$

On peut ainsi définir les "sommes de Darboux" $s(f, \sigma)$ et $S(f, \sigma)$ associées à f et σ :

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) m_i}_{s(f,\sigma)} \leq \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) M_i}_{S(f,\sigma)}.$$

Critère d'intégrabilité

La fonction f est dite intégrable sur $[a, b]$ si $\lim\limits_{\delta(\sigma) \to 0} s(f, \sigma) = \lim\limits_{\delta(\sigma) \to 0} S(f, \sigma) = I_f$.
La limite commune I_f, quand elle existe, de $s(f, \sigma)$ et $S(f, \sigma)$ lorsque $\delta(\sigma)$ tend vers 0, s'appelle "intégrale de

f sur $[a, b]$" ou "somme de f sur $[a, b]$". On la note :

$$I_f = \int_a^b f(x)dx.$$

Le réels a et b s'appellent respectivement "borne inférieure" et "borne supérieure"de l'intégrale. Ayant fait le choix de subdivisions σ telles que $\delta(\sigma) \to 0$ lorsque $n \to \infty$, on peut donc écrire :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) m_i \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) M_i \right),$$

et, pour toute subdivision σ de $[a, b]$, on vérifie que

$$s(f, \sigma) \leq \int_a^b f(t)dt \leq S(f, \sigma).$$

Permutation des bornes inférieure et supérieure

Jusqu'ici, on n'a défini que les intégrales dont la borne inférieure a est plus petite que la borne supérieure b. Pour s'affranchir de cette limitation, on pose simplement :

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$$

Classe de fonctions intégrables

Il n'est pas facile de caractériser complètement l'ensemble de toutes les fonctions intégrables sur $[a, b]$. Néanmoins, on peut démontrer le résultat suivant :

Théorème 1
— *Une fonction monotone sur* $[a, b]$ *est intégrable sur* $[a, b]$,
— *Une fonction continue sur* $[a, b]$ *est intégrable sur* $[a, b]$.

4.1.2 Propriétés de l'intégrale

Interprétation géométrique

Il découle directement de la définition de l'intégrale de f sur $[a, b]$ que $\int_a^b f(x)dx$ est l'*aire algébrique*[1] de la portion de plan située entre la courbe $y = f(x)$ et les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = a$ et $x = b$. La propriété d'additivité des aires permet alors d'écrire la "relation de Chasles" :

$$\boxed{\forall c \in [a, b], \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

1. Par "aire algébrique" il faut comprendre que l'intégrale de f sur $[a, b]$ peut être négative si l'aire géométrique (toujours comptée positivement) de la portion de plan située en dessous de $y = 0$ est supérieure à celle de la portion de plan située au dessus de $y = 0$.

Conséquence : intégration d'une fonction discontinue. Supposons que f soit continue en tout point de $[a,b]$ sauf en le point $c \in]a,b[$ en lequel elle possède une limite à gauche et une limite à droite finies.
On peut donc prolonger la restriction de la fonction f à l'intervalle $[a,c]$, $f_{|[a,c]}$, en une fonction continue sur $[a,c]$ en posant $f_{|[a,c]}(c) = \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$. La fonction ainsi prolongée est continue, donc intégrable sur $[a,c]$.
De même, la restriction de la fonction f à l'intervalle $[c,b]$, $f_{|[c,b]}$, se prolonge en une fonction continue sur $[c,b]$ en posant $f_{|[c,b]}(c) = \lim\limits_{x \to c^+} f(x)$. La fonction ainsi prolongée est continue, donc intégrable sur $[c,b]$.
On définit alors l'intégrale de f sur $[a,b]$ en posant :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f_{|[a,c]}(x)dx + \int_c^b f_{|[c,b]}(x)dx.$$

Avec cette définition, on voit notamment que la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ ne dépend pas de la valeur de $f(c)$ mais de $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ seulement.

Linéarité de l'intégrale

En revenant à la définition de l'intégrale, on montre facilement que

$$\boxed{\begin{array}{c} \displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \displaystyle\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx, \ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}}$$

pour toutes fonctions intégrables f et g.

Signe de l'intégrale

Supposons que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$. On a donc $m_i = \inf\limits_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \geq 0$ pour toute subdivision $\sigma = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ de $[a,b]$. Par suite, $s(f,\sigma) = \sum\limits_{i=0}^{n} \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{>0} \underbrace{m_i}_{\geq 0} \geq 0$, donc, comme $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq s(f,\sigma)$, on en déduit :

$$\boxed{(\forall x \in [a,b], \ f(x) \geq 0) \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0}$$

Conséquences.

Comparaison : $\boxed{(\forall x \in [a,b], \ f(x) \leq g(x)) \Longrightarrow \left(\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx\right)}$

Pour le voir, il suffit d'appliquer l'implication précédente à la fonction $x \mapsto g(x) - f(x)$ puis d'utiliser la linéarité de l'intégrale.

Valeur absolue : $\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx}$

En effet, pour tout $x \in [a,b]$, on a $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, donc, en intégrant cette double inégalité entre a et b, il vient, compte tenu du résultat précédent,

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

ce qui démontre bien le résultat.

Attention : même si la fonction f n'est pas identiquement nulle sur $[a,b]$, l'hypothèse "$f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$" n'assure pas, en général, que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$. En effet, la fonction positive sur $[-1,1]$ suivante

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,1]\backslash\{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

n'est pas identiquement nulle sur $[-1,1]$ bien que $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = 0$. Dans ce contre-exemple, on remarque que la fonction considérée n'est pas continue en $x = 0$.
Par contre, avec une hypothèse de continuité, on assure l'implication suivante :

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ n'est pas identiquement nulle sur } [a,b] \\ \forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0 \\ f \text{ est continue sur [a,b]} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\int_a^b f(x)dx > 0\right).$$

En effet, si f est positive et n'est pas identiquement nulle sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$. Choisissons maintenant $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0$. La fonction f est continue en $x = c$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [a,b] \cap [c-\alpha, c+\alpha],\ |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Quitte à remplacer $c-\alpha$ par a ou $c+\alpha$ par b, supposons que $a \leq c-\alpha$ et $c+\alpha \leq b$. On a ainsi, pour tout $x \in [c-\alpha, c+\alpha] \subset [a,b]$,

$$f(x) = f(c) + (f(x) - f(c)) \geq f(c) - \underbrace{|f(x) - f(c)|}_{<\frac{f(c)}{2}} > \frac{f(c)}{2} > 0.$$

Ainsi,

$$\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(x)dx \geq \underbrace{\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} \frac{f(c)}{2}dx}_{\alpha f(c)} > 0.$$

Par ailleurs, comme

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\int_a^{c-\alpha} f(x)dx}_{\geq 0} + \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(x)dx + \underbrace{\int_{c+\alpha}^b f(x)dx}_{\geq 0},$$

on voit bien que

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(x)dx > 0.$$

Formule de la moyenne

THÉORÈME 2 – *Si f est continue sur $[a, b]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c).$$

Le réel $\dfrac{1}{b-a} \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est appelé valeur moyenne de f sur $[a, b]$.

Démonstration. Comme f est continue sur $[a, b]$, la fonction f possède, en vertu du théorème 6 du chapitre "Limites et continuité", une borne inférieure m ainsi qu'une borne supérieure M sur $[a, b]$:

$$\forall x \in [a, b],\ m \leq f(x) \leq M.$$

En intégrant cette double inégalité entre a et b, il vient alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

soit, en divisant par $\dfrac{1}{b-a} > 0$:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Or, f étant continue sur $[a, b]$, le théorème précédemment cité garantit que tout point $\mu \in [m, M]$ est l'image d'au moins un $x \in [a, b]$. Par suite, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx. \blacksquare$$

4.1.3 Primitive

Définition

La fonction f étant toujours supposée intégrable sur $[a, b]$, on appelle "primitive de f sur $[a, b]$" toute fonction F dérivable vérifiant

$$\forall x \in [a, b],\ F'(x) = f(x).$$

Si f possède une primitive F_0 sur $[a, b]$, alors, pour tout réel C, il est clair que la fonction $F(x) = F_0(x) + C$ est également une primitive de f sur $[a, b]$. Réciproquement, toute primitive F de f sur $[a, b]$ satisfaisant $(F - F_0)'(x) = 0$ pour tout $x \in [a, b]$, la fonction $x \mapsto (F - F_0)(x)$ est constante sur $[a, b]$, donc

$$\forall x \in [a, b],\ F(x) = F_0(x) + \underbrace{(F(a) - F_0(a))}_{C}.$$

Ceci montre que toutes les primitives de f sur $[a, b]$ se déduisent de F_0 par l'addition d'une constante.

Intégrale fonction de sa borne supérieure

Soit $x \in [a,b]$. La fonction f, intégrable sur $[a,b]$, est a fortiori intégrable sur l'intervalle $[a,x]$. Cela permet de définir la fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt. \end{array}$$

THÉORÈME 3 – *La fonction φ est continue sur $[a,b]$.*
Lorsque f est de plus continue sur $[a,b]$, φ est dérivable sur $[a,b]$, et :

$$\forall x \in [a,b],\ \varphi'(x) = f(x).$$

Démonstration. Soit $x_0 \in [a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$, la relation de Chasles montre que

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

La fonction f étant supposée bornée sur $[a,b]$, posons $M_1 = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$. On a donc

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \left|\int_{x_0}^x |f(t)|dt\right| \leq M_1|x - x_0| \overset{x\to x_0}{\to} 0.$$

Par suite, on a montré que $\varphi(x) \overset{x\to x_0}{\to} \varphi(x_0)$ et donc que $x \mapsto \varphi(x)$ est continue en x_0.
Si f est de plus continue sur $[a,b]$, et donc sur $[x_0,x]$, la formule de la moyenne s'applique sur l'intervalle $[x_0,x]$: il existe $c_x \in [x_0,x]$ tel que

$$\frac{1}{x - x_0} \underbrace{\int_{x_0}^x f(t)dt}_{\varphi(x)-\varphi(x_0)} = f(c_x).$$

Faisons tendre maintenant x vers x_0. Comme c_x appartient à $[x_0,x]$, on voit que $c_x \to x_0$ et que $f(c_x) \to f(x_0)$ car f est continue en x_0. L'égalité précédente implique donc :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} f(c_x) = f(x_0),$$

ce qui montre que φ est dérivable en x_0 de nombre dérivé $f(x_0)$. ■

Cas d'une fonction continue

Le théorème 3 assure en fait que toute fonction continue possède des primitives, à savoir $F_C : x \mapsto \varphi(x) + C$ pour tout $C \in \mathbb{R}$.
Ainsi, F étant une primitive de f sur $[a,b]$, il existe un réel C tel que :

$$\forall x \in [a,b],\ F(x) = \underbrace{\int_a^x f(t)dt}_{\varphi(x)} + C.$$

Comme $\varphi(a) = 0$, on a en fait $C = F(a)$. En prenant ensuite $x = b$, il vient finalement

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

ce qui montre que le calcul de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ se ramène ici à celui d'une primitive F de la fonction f.

4.2 Calcul d'intégrales finies

4.2.1 Calcul à l'aide de primitives

L'existence de primitives $x \mapsto F(x) + C$ sur $[a, b]$ de la fonction f permet de ramener le calcul de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ à celui de $F(b) - F(a)$. Il est donc utile de dresser la liste des primitives (quand elles existent) des principales fonctions usuelles.

$\int x^\alpha dx$	$=$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ \alpha \neq -1$	$\int \frac{dx}{x}$	$=$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\int \sin x dx$	$=$	$-\cos x + C$	$\int \cos x dx$	$=$	$\sin x + C$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x}$	$=$	$-\frac{1}{\tan x} + C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$	$=$	$\tan x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$	$=$	$\arcsin x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2}$	$=$	$\arctan x + C$
$\int a^x dx$	$=$	$\frac{a^x}{\ln a} + C,\ a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$	$\int \ln x dx$	$=$	$x \ln x - x + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$	$=$	$-\ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$	$=$	$\ln\left(\sqrt{x^2-1} + x\right) + C$
$\int \frac{dx}{1-x^2}$	$=$	$\frac{1}{2}\ln\left(\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert\right) + C$	$\int \mathrm{chx\ dx}$	$=$	$\mathrm{shx + C}$

4.2.2 Une méthode naturelle : la linéarisation

L'intégrale étant linéaire, on peut parfois ramener le calcul d'une intégrale donnée à celui de la somme d'intégrales plus simples à exprimer.

Exemples.

Intégration des polynômes. Si $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ pour $a_0, a_1, \ldots, a_n$ appartenant à $\mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b P(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \right) dx = \sum_{i=0}^{n} a_i \underbrace{\int_a^b x^i dx}_{\frac{1}{i+1}[x^{i+1}]_a^b} .$$

Intégration de $\sin^2 x$. On utilise la formule de linéarisation $\sin^2 x = \frac{\cos(2x)-1}{2}$, de sorte que

$$\int_a^b \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \left\{ \underbrace{\int_a^b \cos(2x)dx}_{\frac{1}{2}[\sin(2x)]_a^b} - \underbrace{\int_a^b dx}_{[x]_a^b} \right\} .$$