

*Aix-Marseille Université
Institut Universitaire de Technologie
Département Réseaux et Télécommunications*

MATHÉMATIQUES DU SIGNAL DISCRET

Table des matières

1	Séries numériques	5
1.1	Rappels concernant les suites numériques	5
1.1.1	Généralités	5
1.1.2	Suite monotone, suite bornée	5
1.1.3	Notions de convergence	6
1.1.4	Suites remarquables	8
1.2	Les séries numériques	9
1.2.1	Généralités	9
1.2.2	Séries numériques à termes positifs	11
1.2.3	Séries alternées	13
1.3	Règles de d'Alembert et de Cauchy	14
1.3.1	Règle de d'Alembert	14
1.3.2	Règle de Cauchy	15
1.4	Problèmes d'associativité et de commutativité pour les séries	16
1.4.1	Un exemple de ce qu'il ne faut pas faire	16
1.4.2	Groupement de termes et changement de l'ordre des termes d'une série absolument convergente	16
1.4.3	Produit de séries absolument convergentes	17
2	Séries entières	19
2.1	Introduction aux séries de fonctions	19
2.2	Généralités sur les séries entières	20
2.2.1	Définition	20
2.2.2	Rayon de convergence	20
2.2.3	Fonctions définies par une série entière	23
2.3	Fonctions développables en séries entières	24
2.4	Somme et produit de séries entières	26
2.4.1	Définitions	26
2.4.2	Un résultat à connaître	26
2.5	Développement en série entière des fonctions usuelles	26
2.5.1	Cas de la fonction exponentielle	26
2.5.2	Autres fonctions	27
2.6	Série entière d'une variable complexe	27
2.6.1	Définition et propriétés immédiates	27

2.6.2	Fonction exponentielle de la variable complexe	29
2.6.3	Fonctions circulaires complexes	30
3	Transformation en z	33
3.1	Définition de la transformation en z	33
3.1.1	Séquence numérique associée à une fonction	33
3.1.2	Transformée en z	34
3.1.3	Quelques exemples de transformées	34
3.2	Propriétés de \mathcal{Z}	36
3.2.1	Linéarité	36
3.2.2	Décalage	37
3.2.3	Transformée de $(a^{nT} f(nT))_{n \in \mathbb{N}}$	38
3.2.4	Transformée en z de $(nT f(nT))_{n \in \mathbb{N}}$	39
3.2.5	Transformée en z du produit de convolution	39
3.3	Transformation en z inverse	40
3.3.1	Définition	40
3.3.2	Exemples	40
3.4	Une application de la transformation en z : les équations aux différences	41
3.4.1	Un exemple d'équation aux différences	41
3.4.2	Exemple	42
3.5	Transformation de Fourier discrète	42
3.5.1	Définition	42
3.5.2	Périodicité	43
3.5.3	Lien avec les séries de Fourier	43
3.6	Formulaire	43
4	Fonctions de plusieurs variables réelles	45
4.1	Introduction	45
4.1.1	L'ensemble \mathbb{R}^n	45
4.1.2	Généralités sur les fonctions de plusieurs variables	45
4.1.3	Continuité	46
4.1.4	Dérivabilité	48
4.1.5	Dérivées d'ordre supérieur	50
4.1.6	Formule des accroissements finis	52
4.1.7	Formule de Taylor à l'ordre 2	53

Chapitre 1

Séries numériques

1.1 Rappels concernant les suites numériques

1.1.1 Généralités

Notion de suite. Une suite numérique réelle est une fonction de \mathbb{N} (voire d'un sous-ensemble de \mathbb{N}) dans \mathbb{R} . Si u désigne une suite numérique réelle et n un entier naturel, on a l'habitude de noter u_n à la place de $u(n)$. La suite u s'écrit donc :

$$u = (u_0, u_1, \dots, u_n, \dots),$$

ou, ce qui revient au même :

$$u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

L'ensemble des suites numériques réelles indicées par $n \in \mathbb{N}$ est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exemple : la suite géométrique de raison k . Soient a et k deux réels. On peut définir la suite géométrique de raison k et de premier terme a , de deux façons équivalentes :

-**définition explicite** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = ak^n$.

-**définition récurrente** : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_n = \begin{cases} a & \text{si } n = 0; \\ ku_{n-1} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$

1.1.2 Suite monotone, suite bornée

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique réelle.

Monotonie. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) si l'inégalité $u_n \leq u_{n+1}$ (resp. $u_n \geq u_{n+1}$) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite monotone lorsqu'elle est croissante ou lorsqu'elle est décroissante.

On définit de même, à l'aide d'inégalités strictes, les notions de croissance stricte et de décroissance stricte, et donc de stricte monotonie.

Bornes. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée (resp. majorée) s'il existe un réel m , appelé *minorant de $(u_n)_n$* (resp. un réel M , appelé *majorant de $(u_n)_n$*) tel que l'inégalité $u_n \geq m$ (resp. $u_n \leq M$) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Lorsque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à la fois minorée et majorée, elle est dite bornée. Cela revient à dire, qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq C.}$$

Exemples.

a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ est (strictement) décroissante car $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$. Elle est minorée par 0 et majorée par 1. Elle est donc bornée par 1.

b) Par contre la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = (-1)^n$ n'est pas monotone car $v_n > v_{n+1}$ si n est pair, alors que $v_n < v_{n+1}$ si n est impair. Mais elle est minorée par -1 et majorée par 1, donc elle est bornée par 1.

c) La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est (strictement) croissante et elle est minorée par 0. Mais elle n'est pas majorée. En effet, s'il existait un majorant M de cette suite, on devrait avoir $w_{E(\sqrt{M})+1} = (E(\sqrt{M}) + 1)^2 \leq M$, ce qui est impossible car $E(\sqrt{M}) + 1 > \sqrt{M}$. Ici E désigne la fonction *partie entière*.

1.1.3 Notions de convergence

Suite convergente. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $L \in \mathbb{R}$ si l'on peut associer à n'importe quel réel $\varepsilon > 0$ (aussi petit que l'on veut), au moins un entier N_ε (qui dépend a priori d' ε) à partir duquel les termes u_n (pour $n \geq N_\varepsilon$) appartiennent tous à l'intervalle $[L - \varepsilon, L + \varepsilon]$.

En utilisant les quantificateurs, cette définition se réécrit comme suit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_\varepsilon) \implies (|u_n - L| \leq \varepsilon).$$

On note alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$.

Remarque. On dit aussi que u_n tend vers L quand n tend vers l'infini. Par commodité, on notera alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$.

Exemple 1. La suite $u_n = \frac{1}{n}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. En effet, étant donné un réel ε strictement positif arbitrairement choisi, on peut trouver un entier $N_\varepsilon \geq 1$ tel que

$$\forall n \geq 1, (n \geq N_\varepsilon) \implies \left(\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \varepsilon \right).$$

En effet, il suffit pour cela que l'on ait $N_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$, ce qui est vérifié en choisissant $N_\varepsilon = E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + 1$ par exemple.

Exemple 2. La suite $v_n = (-1)^n$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$) n'a pas de limite. En effet, la suite des termes pairs est $v_{2n} = 1$ et celle des termes impairs est $v_{2n+1} = -1$. Cette suite a donc deux *valeurs d'adhérence* (pour la définition de cette notion, voir le cours de première année) distinctes (1 et -1). Elle n'a donc pas de limite.

Limite infinie. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers l'infini si à tout réel $X > 0$ (aussi grand que l'on veut), on peut associer (au moins) un entier N_X (qui dépend a priori de X) à partir duquel les termes u_n (pour $n \geq N_X$) sont tous plus grands que X .

En utilisant les quantificateurs, cette définition se réécrit :

$$\forall X > 0, \exists N_X \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_X) \implies (u_n \geq X).$$

Par abus de notation, on écrit alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$ ou bien $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

Exemple. La suite $u_n = n^2$ définie sur \mathbb{N} , tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini. En effet, donnons-nous un réel X strictement positif, arbitrairement choisi, et cherchons un entier N_X tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_X) \implies (n^2 \geq X).$$

Pour cela, il suffit que l'on ait $N_X^2 \geq X$, ce qui est acquis si l'on choisit $N_X = E(\sqrt{X}) + 1$ par exemple.

Remarque. La convergence vers $-\infty$ se définit de façon analogue.

Règles de calcul sur les limites. Commençons par rappeler le résultat (évident) suivant :

PROPOSITION 1.1. – Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels, vérifiant l'inégalité $u_n \leq v_n$ pour n assez grand. On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n.$$

Remarque importante : seules les inégalités larges se conservent par passage à la limite. En particulier, l'inégalité stricte $u_n < v_n$ n'entraîne pas forcément $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n < \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ mais seulement

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ a priori. Ainsi $\frac{1}{n} < \frac{2}{n}$ pour tout $n \geq 1$, mais les deux suites $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ et $\left(\frac{2}{n}\right)_{n \geq 1}$ ont même limite, 0.

Théorème d'encadrement. Dans le même ordre d'idées, on démontre le théorème dit "d'encadrement" suivant :

THÉORÈME 1.1. – Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = a.$$

Alors, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite a .

Autres résultats utiles sur les limites.

1. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in \mathbb{R}$ alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $(\lambda u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda a$;
2. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in \mathbb{R}$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \in \mathbb{R}$ alors $(u_n + v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$ et $(u_n v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} ab$;
3. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in \mathbb{R}$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm\infty$ alors $(u_n + v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm\infty$;
4. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite, alors la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'en a pas non plus;
5. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in \mathbb{R}_+^*$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm\infty$, alors $(u_n v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm\infty$;
6. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in \mathbb{R}^*$ alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a}$;
7. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pm\infty$ alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;
8. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ et $v_n \geq u_n$ à partir d'un certain rang, alors $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

Application. Quel que soit le réel $\alpha > 0$, $\alpha \ln n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ donc $n^\alpha = e^{\alpha \ln n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. Donc, si $\beta < 0$, $n^\beta = \frac{1}{n^{-\beta}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ car $n^{-\beta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ puisque $-\beta > 0$.

Attention : le fait que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ n'implique pas que la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_n$, à supposer qu'elle soit effectivement définie pour n assez grand, tende vers $\pm\infty$. Ainsi, $\frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, mais la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas, car elle possède deux valeurs d'adhérence distinctes : $+\infty$ et $-\infty$.

Du théorème d'encadrement ainsi que des règles précédentes, on déduit le corollaire suivant :

COROLLAIRE 1.1. – Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée alors $(u_n v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Démonstration. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, donc il existe un réel M tel que $|v_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit :

$$0 \leq |u_n v_n| \leq M |u_n|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Le théorème d'encadrement implique alors $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n v_n| = 0$ soit $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n v_n) = 0$ (en appliquant une nouvelle fois le théorème d'encadrement, puisque $-|u_n v_n| \leq u_n v_n \leq |u_n v_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). ■

1.1.4 Suites remarquables

Ce seront, dans ce cours, deux types de suites (qui sont convergentes) : les suites monotones bornées et les suites adjacentes.

Suites monotones et bornées. Le résultat fondamental s'énonce comme suit :

THÉORÈME 1.2. – Toute suite numérique réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) a une limite finie. Toute suite croissante et non majorée (resp. décroissante et non minorée) tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exemple. la suite $u_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, est croissante et non majorée. On retrouve ainsi qu'elle tend vers $+\infty$.

Application à la suite géométrique. Le résultat (à connaître) est le suivant :

PROPOSITION 1.2. – La suite $(k^n)_{n \in \mathbb{N}}$,

- est convergente de limite $\begin{cases} 0 & \text{si } |k| < 1; \\ 1 & \text{si } k = 1; \end{cases}$
- tend vers $+\infty$ lorsque $k \in]1, +\infty[$;
- n'a pas de limite lorsque $k \in]-\infty, -1]$.

Démonstration. – Si $|k| < 1$, la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante car $|u_{n+1}| = |k||u_n| \leq |u_n|$. Comme cette suite est minorée par 0, c'est une suite convergente. Soit L sa limite. Comme $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$, alors $|u_{n+1}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L$, donc en passant à la limite dans l'égalité $|u_{n+1}| = |k||u_n|$, il vient :

$$L = |k|L \implies \underbrace{(1 - |k|)}_{>0} L = 0 \implies L = 0.$$

Et comme $-|u_n| \leq u_n \leq |u_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, le théorème d'encadrement entraîne $\lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$.

Si $k = 1$, la suite est constante de valeur 1 donc converge vers 1.

Si $k > 1$, alors $k^n = e^{n \ln k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ car $\ln(k) > 0$.

Si $k = -1$, on a déjà vu que cette suite n'avait pas de limite.

Si $k < -1$, $k^n = (-|k|)^n = (-1)^n e^{n \ln |k|}$ et $e^{n \ln |k|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, donc $k^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ et $k^{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$: la suite $(k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ a deux valeurs d'adhérence distinctes ($-\infty$ et $+\infty$), et n'a donc pas de limite. ■

Suites adjacentes. On a le théorème fondamental suivant :

THÉORÈME 1.3. – Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante telles que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(v_n - u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Alors, ces deux suites (dites adjacentes) ont une limite commune L .

Ce résultat nous servira à démontrer la convergence d'un type particulier de séries numériques (les séries alternées) que nous allons étudier maintenant.

1.2 Les séries numériques

1.2.1 Généralités

Définition. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on appelle *somme partielle à l'ordre n* le réel $S_n = \sum_{p=0}^n u_p = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ et on dit que la *série de terme général u_n* , que l'on note $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, est

convergente, si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles a une limite. Dans ce cas, la limite $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ est

appelée *somme de la série* $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et elle est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas convergente, la série $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *divergente*.

Exemple : la série géométrique. Soit $k \in \mathbb{R}$. On sait que

$$S_n = \sum_{p=0}^n k^p = 1 + k + k^2 + \dots + k^n = \begin{cases} \frac{1-k^{n+1}}{1-k} & \text{si } k \neq 1; \\ n+1 & \text{si } k = 1. \end{cases}$$

D'après ce qui précède, la série $\{k^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si $|k| < 1$ et sa somme est $\sum_{n=0}^{+\infty} k^n = \frac{1}{1-k}$. Elle diverge si $|k| \geq 1$.

Remarque importante. On ne modifie pas la nature d'une série en ne modifiant qu'un nombre fini de ses termes. Plus précisément :

PROPOSITION 1.3. – *Lorsque deux séries ne diffèrent que pour un nombre fini de termes, elles sont soit simultanément convergentes, soit simultanément divergentes.*

Démonstration. – Soient $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ deux séries qui ne diffèrent que pour un nombre fini de termes. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = v_n$ pour tout $n > n_0$. Donc, si $S_n = \sum_{p=0}^n u_p$ et $T_n = \sum_{p=0}^n v_p$, on a

$$\forall n > n_0, T_n - S_n = \sum_{p=0}^n (v_p - u_p) = \underbrace{\sum_{p=0}^{n_0} (v_p - u_p)}_{\text{réel indépendant de } n, \text{ noté } C} + \underbrace{\sum_{p=n_0+1}^n (v_p - u_p)}_0 = C.$$

Ainsi, pour tout $n > n_0$, $T_n = C + S_n$ et le résultat s'en déduit immédiatement. ■

Une condition nécessaire de convergence. La proposition suivante est très utile pour prouver la divergence de certaines séries :

PROPOSITION 1.4. – *Pour qu'une série converge, il est nécessaire mais non suffisant que son terme général tende vers 0.*

Démonstration. – Si la série $\{u_n\}$ converge, alors les deux suites $S_n = \sum_{p=0}^n u_p$ et $S_{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1} u_p$ ont même limite. Ainsi, $u_n = S_n - S_{n-1}$ tend vers 0.

Pour voir que la condition énoncée n'est pas suffisante, considérons la série de terme général

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, n \in \mathbb{N}.$$

Il tend bien vers 0, mais $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sqrt{n+1}$ tend vers $+\infty$, donc cette série est divergente. ■

Exemple. La série de terme général $(-1)^n$ diverge car son terme général ne tend pas vers 0. Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 est dite *grossièrement divergente*.

Exemple important : la série harmonique. C'est la série de terme général $u_n = \frac{1}{n}$, pour $n \geq 1$. Bien que son terme général tende vers 0, nous allons montrer que cette série est divergente. Pour cela, commençons par remarquer pour tout entier $n \geq 1$, que l'on a

$$\forall x \in [n, n+1], \frac{1}{n} \geq \frac{1}{x}.$$

Ainsi, en intégrant l'inégalité précédente entre n et $n+1$, il vient

$$\underbrace{\int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx}_{\frac{1}{n}} \geq \underbrace{\int_n^{n+1} \frac{dx}{x}}_{\ln(n+1) - \ln n}.$$

Par suite, pour tout $N \geq 1$, on a

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \geq \ln(N+1),$$

ce qui montre que $S_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} +\infty$ et donc que la série harmonique $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \geq 1}$ diverge.

Absolute convergence. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que la série $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est *absolument convergente* si la série $\{|u_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$, formée par les valeurs absolues de ses termes, est convergente.

L'intérêt de la notion d'absolute convergence est donné par le résultat suivant que l'on admettra :

PROPOSITION 1.6. – *Toute série absolument convergente est convergente.*

Cette proposition permet en effet de ramener l'étude de la convergence de certaines séries $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (dont les termes ne sont pas forcément positifs) à celle de $\{|u_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$, qui appartient à la classe des séries à termes positifs, à laquelle est consacré le paragraphe suivant.

1.2.2 Séries numériques à termes positifs

Ce sont les séries les plus simples à étudier car elles sont associées à des suites croissantes de nombres réels positifs. En effet, si $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une série à termes positifs (c'est-à-dire que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ est croissante. Donc, d'après le théorème 1.2, la série $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Règle de comparaison des séries à termes positifs. Du même théorème 1.2, on déduit facilement :

PROPOSITION 1.7. – *Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs vérifiant $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors :*

— si la série $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, il en est de même de la série $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Et si l'inégalité $u_n \leq v_n$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a de plus $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

— si la série $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, il en est de même de la série $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Un exemple de série à termes positifs : la série de Riemann. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On va étudier la nature de la série $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ en fonction de la valeur de α . Nous savons déjà que cette série diverge pour $\alpha = 1$. Or, si $\alpha \leq 1$, on a $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \geq 0$ pour tout $n \geq 1$. On déduit de la règle de comparaison des séries à termes positifs que $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge lorsque $\alpha \leq 1$.
Reste à étudier le cas où $\alpha > 1$. Pour chaque $n \geq 2$, on sait que

$$\forall x \in [n-1, n], 0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha},$$

donc, en intégrant cette inégalité entre $n-1$ et n , il vient :

$$0 \leq \underbrace{\int_{n-1}^n \frac{dx}{n^\alpha}}_{\frac{1}{n^\alpha}} \leq \underbrace{\int_{n-1}^n \frac{dx}{x^\alpha}}_{\frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} \right)}.$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} \right)$ est convergente car, pour tout entier $N \geq 2$,

$$\sum_{n=2}^N \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{(n-1)^{\alpha-1}} \right) = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{N^{\alpha-1}} - 1 \right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha-1},$$

puisque $\alpha - 1 > 0$. La règle de comparaison des séries à termes positifs montre alors que $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Conclusion. La série $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$, est convergente si $\alpha > 1$ et divergente si $\alpha \leq 1$.

Application. Pour tout $\alpha > 1$, la série $\left\{\frac{\sin(na)}{n^\alpha}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ (où $a \in \mathbb{R}$ est fixé), n'est pas a priori à termes positifs. Mais, il découle facilement de l'étude de la série de Riemann, qu'elle est absolument convergente.

Conséquence : la règle de comparaison à la série de Riemann. Pour qu'une série $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ à termes positifs soit convergente, il suffit qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit majorée. Pour qu'elle soit divergente, il suffit qu'il existe un nombre $k > 0$ tel que l'on ait, à partir d'un certain rang, $nu_n \geq k$.

Autre conséquence : la règle dite de "l'équivalent". Si u_n est équivalent à $\frac{\beta}{n^\alpha}$ au voisinage de $+\infty$, où $\beta \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ sont donnés (cela signifie qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$u_n = \frac{\beta}{n^\alpha} + \frac{\varepsilon_n}{n^\alpha} \text{ avec } \varepsilon_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ce que l'on note simplement

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\beta}{n^\alpha},$$

alors :

$$\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.$$

1.2.3 Séries alternées

Définition. On appelle *série alternée* toute série numérique dont le terme général u_n est de la forme $u_n = (-1)^n v_n$, où $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de nombres positifs, convergeant vers 0.

Exemple. La série $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une série alternée. C'est la *série harmonique alternée*.

Le résultat. Le résultat principal concernant les séries alternées est donné par le théorème suivant :

THÉORÈME 1.4. – Toute série alternée $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. De plus, la suite des sommes partielles $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$, vérifie :

$$S_{2p+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq S_{2p}, \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

Plus précisément, les sommes S_{2p} d'indices pairs tendent en décroissant vers $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et les sommes S_{2p+1}

d'indices impairs tendent en croissant vers $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Démonstration. – On sait que $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n \geq 0$. Comme la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on a

$$\begin{cases} S_{2p+2} - S_{2p} = v_{2p+2} - v_{2p+1} \leq 0 \\ S_{2p+1} - S_{2p-1} = -v_{2p+1} + v_{2p} \geq 0, \end{cases}$$

donc la suite $(S_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(S_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante. Comme, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$S_{2p+1} - S_{2p} = -v_{2p+1},$$

la différence $S_{2p+1} - S_{2p}$ tend vers 0 lorsque p tend vers l'infini. Les suites $(S_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ sont donc adjacentes. D'après le théorème 1.3, elles ont nécessairement une limite commune S qui vérifie

$$S_{2p+1} \leq S \leq S_{2p}, \text{ pour tout } p \in \mathbb{N},$$

ce qui démontre le résultat.

Exemple. La série $\left\{ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est alternée, donc elle converge. Par contre, elle n'est pas absolument convergente. On dit alors qu'elle est *semi-convergente*.

Calcul approché de la somme d'une série alternée. Pour toute série alternée $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, on a $S_n \geq \sum_{k=0}^{\infty} u_k \geq S_{n+1}$ ou bien $S_n \leq \sum_{k=0}^{\infty} u_k \leq S_{n+1}$ selon que n est pair ou impair. Le reste de la série $\{u_p\}_{p \in \mathbb{N}}$

à l'ordre n , à savoir $R_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$, vérifie donc

$$|R_n| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} u_k - S_n \right| \leq \underbrace{\left| S_{n+1} - S_n \right|}_{u_{n+1}}.$$

Ainsi, sachant que la somme de la série harmonique alternée $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est $\ln 2$, on a :

$$\left| \ln 2 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right| \leq \underbrace{\left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right|}_{\frac{1}{n+1}}, \text{ pour tout } n \geq 1,$$

ce qui montre que l'on peut approcher le réel $\ln 2$ à 10^{-3} -près par la somme partielle $\sum_{n=1}^{999} \frac{(-1)^n}{n}$.

1.3 Règles de d'Alembert et de Cauchy

Les outils introduits jusqu'ici (règle de comparaison des séries à termes positifs, règle de comparaison à la série de Riemann, théorème de convergence des séries alternées, etc...) ne permettent pas de déterminer la nature de toutes les séries numériques. C'est pourquoi, on aura parfois besoin de recourir aux règles classiques suivantes..

Dans la suite de ce paragraphe, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de termes réels (de signes quelconques).

1.3.1 Règle de d'Alembert

THÉORÈME 1.5. – Supposons que la suite $\left(\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \right)_n$ est définie pour n assez grand et qu'elle admet une limite L ($0 \leq L \leq \infty$).

Alors :

- si $L < 1$, la série $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est absolument convergente.
- si $L > 1$, la série $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est grossièrement divergente.

Exemple. Soit $u_n = \frac{a^n}{n}$ (où $a \in \mathbb{R}$) pour tout $n \geq 1$. On sait que $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = |a| \left| \frac{n}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a|$, donc la série $\left\{ \frac{a^n}{n} \right\}_{n \geq 1}$ est (absolument) convergente lorsque $|a| < 1$ et (grossièrement) divergente lorsque $|a| > 1$.

Il faut noter que la règle de d'Alembert ne permet pas de prévoir le comportement de la série lorsque la limite L est égale à 1. Et pour cause : dans ce cas de figure, tout peut se produire (convergence comme divergence) comme le montre l'exemple étudié ici. En effet, dans ce cas précis, la limite vaut 1 lorsque $a = \pm 1$, et l'on a déjà vu que $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n \geq 1}$ (correspondant au cas $a = 1$) diverge, alors que $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}_{n \geq 1}$ (correspondant au cas $a = -1$) converge.

Démonstration. Par définition de la limite d'une suite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = L \iff \left(\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } L - \varepsilon \leq \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq L + \varepsilon \text{ dès que } n \geq N_\varepsilon \right).$$

Dans le cas où $L < 1$ il suffit de choisir $\varepsilon = (1 - L)/2 > 0$ et d'appliquer la définition précédente :

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \implies \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \leq L + \varepsilon = \underbrace{\frac{1+L}{2}}_\rho < 1.$$

Par suite $|u_{n+1}| \leq \rho |u_n|$ dès que $n \geq N_\varepsilon$ donc

$$|u_n| \leq \rho^{n-N_\varepsilon} |u_{N_\varepsilon}| = \rho^n \frac{|u_{N_\varepsilon}|}{\rho^{N_\varepsilon}}, \quad \forall n \geq N_\varepsilon.$$

Or la série $\{\rho^n\}_{n \geq N_\varepsilon}$ est convergente car $0 \leq \rho < 1$ donc la série $\{\rho^{n-N_\varepsilon} |u_{N_\varepsilon}|\}_{n \geq N_\varepsilon}$ converge également. Par suite on déduit de l'inégalité ci-dessus et de la règle de comparaison des séries à termes positifs que $\{|u_n|\}_{n \geq N_\varepsilon}$ converge.

Si $L > 1$, on choisit cette fois $\varepsilon = (L - 1)/2 > 0$ et on applique une nouvelle fois la définition, ce qui donne :

$$\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \implies \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \geq L - \varepsilon = \underbrace{\frac{1+L}{2}}_\rho > 1.$$

Ainsi, tous calculs faits, on obtient que

$$|u_n| \geq \rho^n \frac{|u_{N_\varepsilon}|}{\rho^{N_\varepsilon}}, \quad \forall n \geq N_\varepsilon,$$

avec cette fois $\rho > 1$, ce qui permet de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini. ■

1.3.2 Règle de Cauchy

THÉORÈME 1.6. – Si la limite $L = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{\frac{1}{n}}$ existe et vaut éventuellement $+\infty$, alors

- si $L < 1$, la série $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est absolument convergente.
- si $L > 1$, la série $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est grossièrement divergente.

Démonstration. Laissée en exercice car elle est quasi identique à celle de la règle de d'Alembert. ■

Exemple. La série de terme général $u_n = \left(\sin \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$, $n \geq 1$, est convergente car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sin \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sin \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} \right] = \sin 0 = 0.$$

Attention : comme précédemment avec la règle de d'Alembert, tout peut se produire (convergence comme divergence) lorsque $L = 1$.

1.4 Problèmes d'associativité et de commutativité pour les séries

1.4.1 Un exemple de ce qu'il ne faut pas faire

On a déjà vu que la série harmonique alternée $\left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}_{n \geq 1}$ converge et que sa somme S est $\ln 2$:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \dots$$

Changeons maintenant l'ordre des termes de cette somme infinie :

$$S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots,$$

puis groupons deux par deux certains termes consécutifs de la nouvelle somme infinie obtenue :

$$S = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\right)}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)}_{\frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right)}_{\frac{1}{10}} - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2} \left(\underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots}_S \right).$$

Si les manipulations précédentes étaient correctes, on aboutirait à la conclusion que S est égal à $\frac{1}{2}S$, ce qui signifierait que $\ln 2$ est nul. Ce résultat est bien sûr faux.

Moralité : les permutations et groupements de termes, qui ne changent pas la valeur d'une somme finie, sont à éviter avec une somme infinie, sous peine d'en modifier la valeur.

Il est même possible de modifier la nature de certaines séries (les rendre divergentes alors qu'elles étaient initialement convergentes par exemple) rien qu'en réarrangeant l'ordre des termes.

Dans le cas particulier étudié ici, les phénomènes observés tiennent au fait que la série harmonique alternée est semi-convergente. Nous allons voir maintenant que ce genre de mésaventure ne peut pas se produire lorsque la série considérée est absolument convergente.

1.4.2 Groupement de termes et changement de l'ordre des termes d'une série absolument convergente

On retiendra simplement le résultat suivant :

THÉORÈME 1.7. – *Toute série absolument convergente reste convergente lorsque l'on change l'ordre de ses termes. Et sa somme est alors inchangée. De plus, on peut également grouper les termes de la série entre eux, sans en modifier la nature ni la somme.*

Les séries absolument convergentes permettent également un autre type d'opération que nous allons définir maintenant.

1.4.3 Produit de séries absolument convergentes

THÉORÈME 1.8. – Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que les séries $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont absolument convergentes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$w_n = \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p} = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_n v_0.$$

Alors, la série $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right).$$

La série $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée *série produit*.

Exemple. Soient $u_n = a^n$, $v_n = b^n$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$, $|b| < 1$). Les séries géométriques $\{a^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{b^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ étant absolument convergentes, on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n,$$

avec $w_n = \sum_{p=0}^n a^p b^{n-p} = b^n + ab^{n-1} + \dots + a^{n-1}b + a^n$.

Chapitre 2

Séries entières

2.1 Introduction aux séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un sous-ensemble commun de \mathbb{R} noté X (pour chaque entier n , f_n est ainsi une fonction à valeurs dans \mathbb{R} , dont le domaine de définition contient X).

Pour tout $x \in X$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite numérique réelle. Soit

$$I = \{x \in X, \{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente}\},$$

l'ensemble des réels x appartenant à X pour lesquels la série numérique $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Pour tout $x \in I$, posons alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

On définit ainsi une fonction f , de I à valeurs dans \mathbb{R} , qui est appelée *somme de la série de fonctions* $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Elle est notée $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Autrement dit :

$$\forall x \in I, \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right) (x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

L'ensemble I s'appelle *domaine de convergence (simple)* de la série $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Moralité : étudier la série de fonctions $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ c'est :

1. calculer son domaine de convergence ;
2. calculer sa somme en tout point du domaine de convergence.

Exemple : $f_n(x) = x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Chaque fonction f_n , $n \in \mathbb{N}$, est définie sur \mathbb{R} . On peut donc choisir $X = \mathbb{R}$. On a vu au chapitre précédent que la série numérique $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si $|x| < 1$. Par suite, le domaine de convergence de la série de fonctions $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est l'intervalle $I =]-1, 1[$. De plus, pour tout $x \in I$, on a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, (1-x) \left(\sum_{n=0}^N f_n(x) \right) = (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^N) = 1-x^{N+1}.$$

Le réel x étant toujours fixé dans I , faisons maintenant tendre l'entier N vers l'infini dans l'égalité précédente. On obtient alors :

$$(1-x) \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)}_{\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)(x)} = 1.$$

Par suite,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right)(x) = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in I.$$

2.2 Généralités sur les séries entières

2.2.1 Définition

Une série entière est une *série de fonctions* dont le terme général est de la forme $a_n x^n$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite fixée de réels. Le nombre a_n , $n \in \mathbb{N}$, s'appelle le $(n+1)$ ^{ième} coefficient de la série, ou encore le coefficient d'ordre n .

Remarque : pour les séries entières, on peut prendre $X = \mathbb{R}$.

Exemple : la série considérée dans l'exemple de la section précédente est la série entière correspondant à la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont tous les termes sont égaux à 1.

2.2.2 Rayon de convergence

Définition. L'ensemble $\mathcal{E} = \{r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est une partie non vide de \mathbb{R}_+ (puisque $0 \in \mathcal{E}$). Cet ensemble possède donc une borne supérieure (éventuellement égale à $+\infty$ si \mathcal{E} n'est pas borné). Cette borne supérieure, s'appelle le *rayon de convergence* de la série entière $\{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Il est possible de caractériser de façon (un peu) plus explicite le rayon de convergence de la série entière $\{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Pour cela, nous avons besoin d'établir au préalable un résultat un peu technique, appelé lemme d'Abel.

Le lemme d'Abel. Il s'énonce comme suit :

LEMME 2.1. – Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(a_n x_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée (ce qui est en particulier le cas lorsque la série numérique $\{a_n x_0^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente).

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$, la série numérique $\{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est absolument convergente.

Démonstration. Comme $(a_n x_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$, tel que $|a_n x_0^n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < |x_0|$ (on suppose $|x_0| > 0$ sinon le résultat est sans intérêt). Posons ensuite $k = \frac{|x|}{|x_0|}$. On a alors, pour chaque entier n ,

$$0 \leq |a_n x^n| = |a_n x_0^n| k^n \leq M k^n.$$

Or, la série $\{k^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puisque $|k| < 1$, donc la règle de comparaison des séries à termes positifs garantit la convergence de $\{|a_n x^n|\}_{n \in \mathbb{N}}$. ■

Caractérisation. Venons-en maintenant à la caractérisation annoncée du rayon de convergence de la série entière $\{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$:

PROPOSITION 2.1. – Soit R le rayon de convergence de la série entière $\{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ($0 \leq R \leq +\infty$).

Alors :

- si $R = 0$, la série ne converge que pour $x = 0$;
- si $R = +\infty$, la série est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$;
- si $R \in \mathbb{R}_+^*$, la série est $\begin{cases} \text{absolument convergente pour tout } |x| < R; \\ \text{grossièrement divergente pour tout } |x| > R. \end{cases}$

Démonstration. Si $R = 0$ alors, quel que soit $x \neq 0$, la suite $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée puisque $|x|$ n'appartient pas à \mathcal{E} . Par suite, $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 et la série numérique $\{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est grossièrement divergente.

Si $R = +\infty$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, le réel $|x| + 1$ appartient à \mathcal{E} donc la suite $(a_n (|x| + 1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Comme $|x| < |x| + 1$, le lemme d'Abel entraîne que $\{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est absolument convergente.

Si $R \in \mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > R$, le réel $|x|$ n'appartient pas à \mathcal{E} (sinon R ne serait pas un majorant de \mathcal{E}) donc, comme on vient de le voir pour le cas où $R = 0$, la suite $(a_n x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 et $\{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est grossièrement divergente. Par contre, si $|x| < R$, le réel $r_0 = \frac{|x| + R}{2}$ appartient à \mathcal{E} (sinon, r_0 serait un majorant de \mathcal{E} strictement inférieur à R , ce qui contredirait le fait que R est la borne supérieure de \mathcal{E}), donc, comme $|x| < r_0$, le lemme d'Abel assure que la série $\{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est absolument convergente. ■

Remarque. Pour une série entière, le domaine de convergence I est donc un intervalle. Lorsque $R \in \mathbb{R}_+^*$, $I =] - R, R[$ s'appelle l'intervalle (ouvert) de convergence de la série.

Il faut noter que la caractérisation précédente ne précise pas le comportement de la série entière en question sur le bord de cet intervalle de convergence (c'est-à-dire pour $x = \pm R$).

Exemple. On prend $a_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. On sait que la série $\left\{ \frac{x^n}{n} \right\}_{n \geq 1}$ converge absolument si $|x| < 1$ et diverge grossièrement lorsque $|x| > 1$. On en déduit que $R = 1$. Par contre, le comportement de cette série diffère suivant que l'on se place à l'une ou à l'autre des deux extrémités de l'intervalle de convergence. Ainsi, pour $x = -1$, la série converge, alors qu'elle diverge si $x = 1$.

Calcul pratique du rayon de convergence. Pour calculer explicitement le rayon de convergence de la série entière $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, on utilisera essentiellement l'une des deux règles (admises) qui suivent.

La règle de d'Alembert. C'est celle qui sert le plus souvent.

PROPOSITION 2.2. – Si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ est définie pour n assez grand et que l'on a de plus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L \quad (L \text{ étant éventuellement égal à } +\infty),$$

alors :

$$R = \frac{1}{L} \quad (\text{avec } R = +\infty \text{ si } L = 0 \text{ et } R = 0 \text{ si } L = +\infty).$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 1.6 du chapitre 1. ■

Exemple. On choisit $a_n = \frac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

donc le rayon de convergence de la série entière $\left\{\frac{x^n}{n!}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ est $+\infty$.

Attention : il n'y a pas de réciproque à la règle de d'Alembert. En clair, le fait que le rayon de convergence de la série entière $\{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ soit égal à R n'implique pas nécessairement que la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ soit convergente de limite $\frac{1}{R}$.

La règle d'Hadamard (version simplifiée).

PROPOSITION 2.3. – Si la suite $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)_{n \geq 1}$ tend vers L (y compris $L = +\infty$), alors

$$R = \frac{1}{L} \quad (\text{avec toujours } R = +\infty \text{ si } L = 0 \text{ et } R = 0 \text{ si } L = +\infty).$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du théorème 1.7 du chapitre 1. ■

Attention : comme pour la règle de d'Alembert, il n'y a pas de réciproque à cette proposition. Le fait que le rayon de convergence de la série entière $\{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ soit égal à R n'implique donc pas nécessairement que la suite $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente de limite $\frac{1}{R}$.

Séries lacunaires. Ce sont des séries entières $\{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dont tous les coefficients d'indices pairs (ou bien impairs) sont nuls à partir d'un certain rang. C'est le cas des séries $\left\{ \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ ou $\left\{ \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$, par exemple.

Supposons pour fixer les idées que $a_{2n+1} = 0$ pour tout n supérieur à un certain entier n_0 . On admettra alors les résultats suivants (qui se transposent sans grand changement au cas où $a_{2n} = 0$ à partir d'un certain entier n_1) :

— si la suite $\left(\left| \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} \right| \right)_n$ est définie pour n assez grand et que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} \right| = L$, alors :

$$R = \frac{1}{\sqrt{L}}.$$

— si la suite $(|a_{2n}|^{\frac{1}{2n}})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers L lorsque n tend vers l'infini, alors $R = \frac{1}{L}$.

Ainsi, le rayon de convergence de la série $\left\{ \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ est $+\infty$ car $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = 0$.

2.2.3 Fonctions définies par une série entière

Soit $\{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Alors, on montre que :

le rayon de convergence de la série entière $\{n a_n x^{n-1}\}_{n \geq 1}$ est toujours égal à R .

Cette propriété permet en fait de dériver la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sur $] -R, R[$, comme nous allons le voir maintenant à l'aide du théorème fondamental (admis) qui suit.

Dérivabilité.

THÉORÈME 2.1. — La fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est dérivable sur $] -R, R[$, et

$$\forall x \in] -R, R[, f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Exemple. Pour tout $x \in] -1, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, donc :

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}.$$

Généralisation. Le résultat précédent implique en particulier que la fonction f est continue sur $] -R, R[$. D'autre part, comme le rayon de convergence de la série entière "dérivée" reste égal à R , on peut appliquer à nouveau le théorème 2.1 à f' . En raisonnant par récurrence, on obtient ainsi sans difficulté :

THÉORÈME 2.1 BIS. – La fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est indéfiniment dérivable sur $] - R, R[$, et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall x \in] - R, R[, f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n x^{n-p}.$$

Exemple. Pour chaque entier $p \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$\forall x \in] - 1, 1[, \frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(p)} = \sum_{n=p}^{\infty} \underbrace{n(n-1) \dots (n-p+1)}_{p! C_n^p} x^{n-p}.$$

Intégration. La somme de la série entière $\{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est continue donc intégrable sur $] - R, R[$. Comme pour la dérivée, on peut préciser l'expression de sa primitive.

THÉORÈME 2.2. – La fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est intégrable sur $] - R, R[$, et on a :

$$\forall x \in] - R, R[, \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Remarque. On déduit du théorème 2.2 que le rayon de convergence de la série entière $\left\{ \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ est supérieur ou égal à R .

2.3 Fonctions développables en séries entières

Soient V un voisinage de 0 (c'est-à-dire un sous-ensemble de \mathbb{R} incluant un intervalle ouvert qui contient 0) et f une fonction de V dans \mathbb{R} .

Définition. On dit que f est *développable en série entière sur V* si f coïncide avec la somme d'une série entière sur l'intervalle V . Autrement dit, s'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels, telle que :

$$\forall x \in V, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Exemple : la restriction de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ à l'intervalle $V =] - 1, 1[$ est développable en série entière car on a vu que

$$\forall x \in V, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Unicité du développement en série entière. Elle découle simplement du théorème suivant, qui est lui-même une conséquence simple du théorème 2.1.

THÉORÈME 2.3. – Soit f une fonction développable en série entière sur V , telle que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in V$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

La suite des coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ainsi entièrement déterminée par la donnée de f . Le développement en série entière de f est donc unique :

$$\forall x \in V, f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n.$$

Conséquence : principe du prolongement analytique. Soient f et g deux fonctions développables en séries entières sur un intervalle $] -R, +R[$. Si f et g coïncident sur l'intervalle $] -r, r[$ avec $0 < r < R$, alors elles coïncident sur $] -R, +R[$ en entier.

Lien avec la notion de développement limité au voisinage de 0. La fonction f étant toujours supposée développable en série entière sur V , avec $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in V$, on a pour tout entier N fixé :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^N a_n x^n}_{\in \mathbb{R}_N[X]} + x^N \underbrace{\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^{n-N} \right)}_{\varepsilon_N(x)}.$$

Or, pour tout $x \in V$, on remarque que $\varepsilon_N(x) = x \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^{n-(N+1)} \right)$. Comme la série $\{a_n x^{n-(N+1)}\}_{n \geq N+1}$ est absolument convergente, on a donc forcément $\lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon_N(x) = 0$.

Cela montre pour chaque entier N , que f admet un développement limité à l'ordre N en 0, dont la partie régulière est le polynôme $\sum_{n=0}^N a_n x^n$.

Remarque importante. D'après le théorème de dérivation des séries entières, toute fonction f développable en série entière sur V est forcément de classe C^∞ sur V .

Par contre, une fonction de classe C^∞ sur V n'est pas forcément développable en série entière sur V .

En effet, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0; \\ 0 & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , et on vérifie sans difficulté que $f^{(p)}(0) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Si f était développable en série entière sur un intervalle ouvert $] -r, r[$ (avec $r > 0$), on aurait forcément $f(x) = 0$ pour tout $x \in] -r, r[$, ce qui est faux.

2.4 Somme et produit de séries entières

Soient $A = \{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $B = \{b_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ deux séries entières.

2.4.1 Définitions

La somme des séries A et B , notée $A + B$, est la série entière $\{(a_n + b_n)x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et leur produit, noté AB , est la série entière $\{c_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, où l'on a posé, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0.$$

2.4.2 Un résultat à connaître

THÉORÈME 2.4. – On suppose que les rayons de convergence des séries A et B sont respectivement $R_A > 0$ et $R_B > 0$.

Alors, chacune des séries entières $A + B$ et AB a un rayon de convergence supérieur ou égal à $R = \min(R_A, R_B)$. De plus, pour tout $x \in]-R, R[$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right),$$

avec

$$c_n = \sum_{p=0}^n a_p b_{n-p} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0.$$

Exemple : le rayon de convergence de la série entière $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est 1, et

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

donc, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\left(\frac{1}{1-x} \right)^2 = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n.$$

2.5 Développement en série entière des fonctions usuelles

2.5.1 Cas de la fonction exponentielle

La fonction $x \mapsto e^x$ est l'unique solution u du problème différentiel de Cauchy :

$$(C) \quad \begin{cases} u'(x) - u(x) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}; \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

Afin de montrer que la fonction exponentielle est développable en série entière sur \mathbb{R} , nous allons calculer une solution de (C) sous forme de série entière. Comme l'unique solution de (C) est $u = \exp$, on en déduira que la fonction \exp est développable en série entière sur \mathbb{R} (et l'on obtiendra du même coup son développement en

série entière).

Supposons donc que le problème (C) possède une solution u de la forme $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, associé à une série entière $A = \{a_n x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dont le rayon de convergence R est supposé non nul. Alors, d'après le théorème 2.1, on sait que

$$\forall x \in]-R, R[, u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Ensuite, comme le rayon de convergence de la série entière $A' = \{n a_n x^{n-1}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est égal à R , il résulte du théorème 2.4 que celui de la différence $A - A'$ est supérieur ou égal à R , et que :

$$\forall x \in]-R, R[, \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - (n+1) a_{n+1}) x^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, on en déduit que $a_n - (n+1) a_{n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}.$$

Enfin, comme $a_0 = u(0) = 1$, il vient immédiatement $a_n = \frac{1}{n!}$ pour tout entier n .

Conclusion partielle : s'il existe une solution de (C) développable en série entière sur un voisinage de 0, ce ne peut être que la fonction

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Réciproquement, la règle de d'Alembert montre que le rayon de convergence de la série entière $\left\{ \frac{x^n}{n!} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ est $+\infty$, et on vérifie, en appliquant les théorèmes 2.1 et 2.4, que sa somme est bien solution du problème initial (C).

Conclusion : la fonction \exp est développable en série entière sur \mathbb{R} , et

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

2.5.2 Autres fonctions

A l'image de ce qui vient d'être fait pour la fonction \exp , le calcul des développements en séries entières des principales fonctions usuelles permet d'obtenir le formulaire placé à la dernière page de ce chapitre.

2.6 Série entière d'une variable complexe

2.6.1 Définition et propriétés immédiates

Une série entière d'une variable complexe est une série dont le terme général est de la forme $u_n = a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$, où la variable z est *a priori* complexe. On définit alors comme dans le cas d'une variable réelle les notions de convergence (semi-convergence et convergence absolue) et de divergence (divergence grossière notamment) qui s'y rattachent.

Le lemme d'Abel appliqué à la série des modules $\{|a_n z^n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ permet de démontrer (exactement comme dans le cas réel) l'existence d'un unique réel $R \geq 0$ (éventuellement égal à $+\infty$) appelé *rayon de convergence* et satisfaisant simultanément les deux conditions suivantes :

- $\{a_n z^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est absolument convergente si $|z| < R$;
- $\{a_n z^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est grossièrement divergente si $|z| > R$.

Le domaine de convergence de cette série contient donc le disque complexe ouvert de rayon R centré à l'origine, $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$, et est contenu dans le disque complexe fermé centré en 0 et de rayon R , $\overline{D(0, R)} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq R\}$:

$$D(0, R) \subset \text{domaine de convergence} \subset \overline{D(0, R)}$$

Comme dans le cas de la variable réelle, il n'existe pas de résultat général concernant le comportement d'une série d'une variable complexe sur le bord $C(0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| = R\}$.

Remarque.

- si $R = 0$ alors $D(0, R) = \emptyset$ et $\overline{D(0, R)} = \{0\}$ et dans ce cas le domaine de convergence est réduit à l'origine $z = 0$;
- si $R = +\infty$ alors $D(0, R) = \overline{D(0, R)} = \mathbb{C}$ et dans ce cas le domaine de convergence est \mathbb{C} en entier.

Exemple. Si $u_n = z^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors $|u_n|^{1/n} = |z|$ donc le critère de Cauchy assure que

$$\begin{cases} \text{si } |z| < 1, & \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est absolument convergente;} \\ \text{si } |z| > 1, & \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est grossièrement divergente.} \end{cases}$$

Par suite $R = 1$ (on aurait obtenu le même résultat en appliquant directement la règle de d'Alembert ou celle d'Hadarnard). Il est à noter dans ce cas particulier que le domaine de convergence est $D(0, 1)$. Par ailleurs, un calcul maintenant classique donne

$$\forall z \in D(0, 1), \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

On vient donc de voir sur cet exemple qu'en tout point de $D(0, R)$ la somme d'une série entière d'une variable complexe définit une fonction de la variable complexe z :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

En particulier, f hérite des propriétés de la somme d'une série entière : continuité et dérivabilité notamment. Ce principe nous permet donc de dériver par rapport à la variable complexe z la somme d'une série entière (ce qui n'est pas évident à définir en toute généralité) :

$$\forall z \in D(0, R), f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

On peut donc utiliser la théorie des séries entières pour prolonger les fonctions classiques de l'analyse définies sur \mathbb{R} à \mathbb{C} (ou un de ses sous-ensembles).

2.6.2 Fonction exponentielle de la variable complexe

On a déjà vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n/n!$. Cela amène donc à définir la fonction *exponentielle complexe* $z \mapsto e^z$ comme suit :

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!},$$

car il est évident que le rayon de convergence de cette série entière est infini. Il est clair que cette fonction prolonge bien la fonction exponentielle réelle.

En particulier, la fonction exponentielle complexe est dérivable et l'on a :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \frac{d}{dz}(e^z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

De même, en appliquant le théorème de multiplication des séries entières, il vient pour tout z et z' appartenant à \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} e^z \times e^{z'} &= \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots\right) \times \left(1 + z' + \frac{z'^2}{2} + \dots + \frac{z'^m}{m!} + \dots\right) \\ &= 1 + (z + z') + \left(\frac{z^2}{2} + zz' + \frac{z'^2}{2}\right) + \dots + \\ &\quad \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}z' + \frac{z^{n-2}}{(n-2)!}\frac{z'^2}{2} + \dots + \frac{z^2}{2}\frac{z'^{n-2}}{(n-2)!} + z\frac{z'^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{z'^n}{n!}\right) + \dots \\ &= 1 + (z + z') + \frac{1}{2}(z^2 + 2zz' + z'^2) + \dots + \frac{1}{n!}(z^n + nz^{n-1}z' + \dots + nzz'^{n-1} + z'^n) + \dots \\ &= 1 + (z + z') + \frac{1}{2}(C_2^0 z^2 + C_2^1 zz' + C_2^2 z'^2) + \dots + \\ &\quad \frac{1}{n!}(C_n^0 z^n + C_n^1 z^{n-1}z' + \dots + C_n^{n-1} z z'^{n-1} + C_n^n z'^n) + \dots \\ &= 1 + (z + z') + \frac{1}{2}(z + z')^2 + \dots + \frac{1}{n!}(z + z')^n + \dots \\ &= e^{z+z'}, \end{aligned}$$

ce qui généralise la propriété bien connue de l'exponentielle réelle au cas complexe.

Remarque. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a par définition de la fonction exponentielle complexe :

$$\begin{aligned} e^{jy} &= 1 + jy + \frac{(jy)^2}{2} + \frac{(jy)^3}{3!} + \dots + \frac{(jy)^n}{n!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} - \dots\right) + j\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots\right) \\ &= \cos y + j \sin y, \end{aligned}$$

résultat conforme à la définition qui a été donnée en première année. En combinant ensuite ce dernier résultat au précédent, on obtient donc pour les réels x et y :

$$e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x (\cos y + j \sin y).$$

2.6.3 Fonctions circulaires complexes

Par analogie avec ce qui vient d'être fait pour la fonction exponentielle, on peut prolonger les fonctions circulaires réelles à \mathbb{C} tout entier en posant :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n},$$

car les rayons de convergence respectifs de ces deux séries sont infinis.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on déduit facilement des deux définitions précédentes :

$$\begin{cases} (i) & \cos z + j \sin z = 1 + jz + \frac{(jz)^2}{2} + \frac{(jz)^3}{3!} + \dots + \frac{(jz)^n}{n!} + \dots = e^{jz}; \\ (ii) & \cos z - j \sin z = 1 - jz + \frac{(-jz)^2}{2} + \frac{(-jz)^3}{3!} + \dots + \frac{(-jz)^n}{n!} + \dots = e^{-jz}. \end{cases}$$

En additionnant puis en soustrayant (i) à (ii) on a donc démontré que :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}}$$

ce qui généralise les *formules d'Euler* vues en première année au cas complexe.

Développement en série entière des principales fonctions usuelles

e^x	=	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\ln(1+x)$	=	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$	$R = 1$
$(1+x)^\alpha$	=	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$R = 1$
$\sin x$	=	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$R = +\infty$
$\cos x$	=	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$R = +\infty$
$\operatorname{sh} x$	=	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$R = +\infty$
$\operatorname{ch} x$	=	$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$	$R = +\infty$
$\arcsin x$	=	$x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \dots = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$R = 1$
$\arctan x$	=	$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	$R = 1$

Chapitre 3

Transformation en z

Dans tout ce chapitre, les fonctions réelles de la variable réelle considérées sont supposées nulles sur \mathbb{R}_- , et T désigne un réel strictement positif.

3.1 Définition de la transformation en z

3.1.1 Séquence numérique associée à une fonction

Définition

Soit f une fonction. On appelle *séquence numérique associée à f* la suite de réels

$$f_e = (f(0), f(T), f(2T), \dots) = (f(nT))_{n \in \mathbb{N}},$$

obtenue en échantillonnant la fonction f selon la période T .

T s'appelle la période d'échantillonnage de f et f_e est parfois appelée "fonction échantillonnée de f " (selon la période T).

Exemples

On prend $T = 1$.

1) Suite échelon unité

C'est la suite obtenue en échantillonnant la fonction "échelon unité"

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0; \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On a donc $\mathcal{U}(n) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Suite de Dirac

C'est la suite obtenue en échantillonnant la distribution de Dirac

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0; \\ 0 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

La suite de Dirac est donc définie par

$$\begin{cases} \delta(0) = 1; \\ \delta(n) = 0 \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

3) Suite de Dirac retardée

On appelle ainsi la suite obtenue en échantillonnant la distribution de Dirac retardée de k unités, où k est un entier naturel fixé :

$$\delta_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = k; \\ 0 & \text{si } x \neq k. \end{cases}$$

La suite de Dirac retardée de k unités est donc définie par

$$\begin{cases} \delta_k(n) = 1 & \text{si } n = k; \\ \delta_k(n) = 0 & \text{si } n \neq k. \end{cases}$$

Ceci permet de considérer la suite échelon unité, notée \mathcal{U}_e selon la convention adoptée en début de chapitre, comme une somme de suites de Dirac retardées :

$$\mathcal{U}_e = \sum_{k=0}^{+\infty} (\delta_k)_e.$$

3.1.2 Transformée en z

On appelle *transformée en z* de la séquence numérique associée à la fonction f , $f_e = (f(nT))_{n \in \mathbb{N}}$, la fonction de la variable complexe z définie par

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)z^{-n}.$$

F est l'image de f_e , et f_e est l'original de F dans la "transformation en z ", notée \mathcal{Z} .

La transformée en z de la séquence numérique f_e est donc la somme d'une série entière de la variable $\frac{1}{z}$. Si R désigne la rayon de convergence de cette série, $F(z)$ est donc définie pour tout nombre complexe z satisfaisant

$$\left| \frac{1}{z} \right| < R,$$

c'est-à-dire, sous l'hypothèse $R > 0$, si

$$|z| > \frac{1}{R}.$$

L'ensemble de définition de la fonction F est donc l'extérieur du disque de centre O et de rayon $\frac{1}{R}$.

3.1.3 Quelques exemples de transformées

On choisit à nouveau $T = 1$.

Transformée de la suite échelon unité

Comme $\mathcal{U}_e = (1)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

C'est la somme de la suite géométrique de raison $\frac{1}{z}$. Elle est définie si $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, c'est-à-dire si $|z| > 1$, et elle vaut dans ce cas :

$$F(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z - 1}.$$

Ce qui se résume en écrivant :

$$\mathcal{Z}\{\mathcal{U}_e\}(z) = \frac{z}{z - 1} \quad \text{pour } |z| > 1.$$

Plus généralement, on démontrera un peu plus loin pour tout complexe $a \in \mathbb{C}$ l'égalité suivante :

$$\mathcal{Z}\{(a^n \mathcal{U}(n))_{n \in \mathbb{N}}\}(z) = \frac{z}{z - a} \quad \text{pour } |z| > |a|.$$

Transformée de la suite de Dirac

Comme $\begin{cases} \delta(0) = 1; \\ \delta(n) = 0 \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*, \end{cases}$ la transformée en z de la suite de Dirac s'écrit :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(n) z^{-n} = 1.$$

On a donc obtenu

$$\mathcal{Z}\{\delta_e\}(z) = 1 \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}.$$

Transformée de la suite de Dirac retardée

Comme $\begin{cases} \delta_k(n) = 1 \quad \text{si } n = k; \\ \delta_k(n) = 0 \quad \text{si } n \neq k, \end{cases}$ la transformée en z de la suite de Dirac retardée s'écrit

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_k(n) z^{-n} = z^{-k}.$$

On retiendra donc :

$$\mathcal{Z}\{(\delta_k)_e\}(z) = z^{-k} \quad \text{pour } z \in \mathbb{C}^*.$$

3.2 Propriétés de \mathcal{Z}

3.2.1 Linéarité

La transformation en z est linéaire

Soient f_e et g_e deux séquences numériques respectivement associées aux fonctions f et g échantillonnées selon la même période d'échantillonnage T . On suppose que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)z^{-n}$ converge pour $|z| > \frac{1}{R}$

et que $\sum_{n=0}^{+\infty} g(nT)z^{-n}$ converge pour $|z| > \frac{1}{R'}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $\mu \in \mathbb{C}$, on a alors :

$$\mathcal{Z}\{\lambda f_e + \mu g_e\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda f(nT) + \mu g(nT)) z^{-n} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)z^{-n} + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} g(nT)z^{-n}.$$

Ainsi, quels que soient les nombres complexes λ et μ , on peut écrire

$$\boxed{\mathcal{Z}\{\lambda f_e + \mu g_e\} = \lambda \mathcal{Z}\{f_e\} + \mu \mathcal{Z}\{g_e\}.}$$

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda f(nT) + \mu g(nT)) z^{-n}$ converge donc (au moins) pour

$$|z| > \max\left(\frac{1}{R}, \frac{1}{R'}\right).$$

Un exemple : calcul de la transformée en z des fonctions circulaires

Notons $\sin(\omega.)_e$ (sinus échantillonné, ou sinus "discret") la séquence $(\sin(\omega nT)\mathcal{U}(nT))_{n \in \mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que

$$\sin(\omega nT) = \frac{e^{j\omega nT} - e^{-j\omega nT}}{2j},$$

donc, par linéarité de \mathcal{Z} :

$$\mathcal{Z}\{\sin(\omega.)_e\}(z) = \frac{1}{2j} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{e^{j\omega T}}{z}\right)^n}_{e^{j\omega nT} z^{-n}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\frac{e^{-j\omega T}}{z}\right)^n}_{e^{-j\omega nT} z^{-n}} \right] = \frac{1}{2j} \left[\frac{z}{z - e^{j\omega T}} - \frac{z}{z - e^{-j\omega T}} \right],$$

pour $\left| \frac{e^{\pm j\omega T}}{z} \right| = \frac{|e^{\pm j\omega T}|}{|z|} = \frac{1}{|z|} < 1$. Ce qui donne, toutes simplifications faites,

$$\boxed{\mathcal{Z}\{\sin(\omega.)_e\}(z) = \frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1} \quad \text{pour } |z| > 1.}$$

En procédant de même, on montre que la transformée en z du cosinus discret $\cos(\omega.)_e$ (c'est-à-dire de la séquence numérique $(\cos(\omega nT)\mathcal{U}(nT))_{n \in \mathbb{N}}$) est :

$$\boxed{\mathcal{Z}\{\cos(\omega.)_e\}(z) = \frac{z^2 - z \cos(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1} \quad \text{pour } |z| > 1.}$$

3.2.2 Décalage

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

Séquence retardée

Cas général. On considère la séquence f_{ret} obtenue en “retardant” la séquence f_e de mT :

$$f_{ret} = (f(nT - mT))_{n \in \mathbb{N}}.$$

On a ainsi

$$\mathcal{Z}\{f_{ret}\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{f(nT - mT)}_{(n-m)T} z^{-n}.$$

En effectuant le changement d'indice $p = n - m$, il vient alors :

$$\mathcal{Z}\{f_{ret}\}(z) = \sum_{p=-m}^{+\infty} f(pT) z^{-p-m} = z^{-m} \left[\underbrace{\sum_{p=-m}^{-1} f(pT) z^{-p}}_{\text{zéro car } f = 0 \text{ sur } \mathbb{R}_-} + \underbrace{\sum_{p=0}^{+\infty} f(pT) z^{-p}}_{\mathcal{Z}\{f_e\}(z)} \right],$$

donc

$$\boxed{\mathcal{Z}\{f_{ret}\}(z) = \frac{1}{z^m} \mathcal{Z}\{f_e\}(z),}$$

ou, de façon plus explicite :

$$\boxed{\mathcal{Z}\{(f(nT - mT))_{n \in \mathbb{N}}\}(z) = \frac{1}{z^m} \mathcal{Z}\{(f(nT))_{n \in \mathbb{N}}\}(z).}$$

Cas particulier où $T = 1$. On a dans ce cas :

$$\mathcal{Z}\{(f(n-1))_{n \in \mathbb{N}}\}(z) = \frac{1}{z} \mathcal{Z}\{(f(n))_{n \in \mathbb{N}}\}(z),$$

et on retiendra que :

$$\boxed{\text{La division par } z \text{ correspond à un retard unité.}}$$

Séquence avancée

Cas général. On considère de même la séquence f_{av} obtenue en “avançant” la séquence f_e de mT :

$$f_{av} = (f(nT + mT))_{n \in \mathbb{N}}.$$

On a alors :

$$\mathcal{Z}\{f_{av}\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{f(nT + mT)}_{(n+m)T} z^{-n}.$$

En posant ensuite $p = n + m$, on obtient

$$\mathcal{Z}\{f_{av}\}(z) = \sum_{p=m}^{+\infty} f(pT)z^{-(p-m)} = z^m \sum_{p=m}^{+\infty} f(pT)z^{-p}.$$

Or, $\sum_{p=m}^{+\infty} f(pT)z^{-p} = \mathcal{Z}\{f_e\}(z) - \sum_{p=0}^{m-1} f(pT)z^{-p}$, donc

$$\mathcal{Z}\{f_{av}\}(z) = z^m \left[\mathcal{Z}\{f_e\}(z) - \sum_{p=0}^{m-1} f(pT)z^{-p} \right].$$

Ce que l'on écrit également de façon un peu plus explicite :

$$\mathcal{Z}\{(f(nT + mT))_{n \in \mathbb{N}}\}(z) = z^m \left[\mathcal{Z}\{(f(nT))_{n \in \mathbb{N}}\}(z) - \sum_{p=0}^{m-1} f(pT)z^{-p} \right].$$

Cas particulier où $T = 1$. On a dans ce cas :

$$\mathcal{Z}\{(f(n+1))_{n \in \mathbb{N}}\}(z) = z [\mathcal{Z}\{(f(n))_{n \in \mathbb{N}}\}(z) - f(0)],$$

ce qui, sous l'hypothèse supplémentaire $f(0) = 0$, se résume comme suit :

$$\boxed{\text{La multiplication par } z \text{ correspond à une avance unité.}}$$

3.2.3 Transformée de $(a^{nT} f(nT))_{n \in \mathbb{N}}$

Soit a un nombre complexe fixé. En notant F la transformée en z de la séquence $(f(nT))_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$$\mathcal{Z}\{(a^{nT} f(nT))_{n \in \mathbb{N}}\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^{nT} f(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) \left(\frac{z}{a^T} \right)^{-n},$$

donc :

$$\mathcal{Z}\{(a^{nT} f(nT))_{n \in \mathbb{N}}\}(z) = F \left(\frac{z}{a^T} \right).$$

Application : calcul de la transformée de $(a^n \mathcal{U}(n))_{n \in \mathbb{N}}$

Dans ce cas particulier, on prend $T = 1$ et $f = \mathcal{U}$, de sorte que $F(z) = \frac{z}{z-1}$ pour tout $|z| > 1$. On obtient ainsi

$$\mathcal{Z}\{(a^n \mathcal{U}(n))_{n \in \mathbb{N}}\}(z) = \frac{\frac{z}{a}}{\frac{z}{a} - 1} = \frac{z}{z - a}$$

si $\left| \frac{z}{a} \right| > 1$, c'est-à-dire si $|z| > |a|$, ce qui démontre bien le résultat annoncé plus haut.

3.2.4 Transformée en z de $(nTf(nT))_{n \in \mathbb{N}}$

Notons à nouveau F la transformée en z de la séquence $(f(nT))_{n \in \mathbb{N}}$. La somme de la série entière $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)z^{-n}$ est dérivable à l'intérieur de son disque de convergence, et

$$F'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-n)f(nT)z^{-n-1}.$$

Or, par définition,

$$\mathcal{Z}\{(nTf(nT))_{n \in \mathbb{N}}\}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} nTf(nT)z^{-n} = T \sum_{n=1}^{+\infty} n f(nT)z^{-n},$$

donc on obtient finalement

$$\boxed{\mathcal{Z}\{(nTf(nT))_{n \in \mathbb{N}}\}(z) = -zTF'(z).}$$

3.2.5 Transformée en z du produit de convolution

On a défini en première année (voir le cours sur les transformées de Fourier ou de Laplace) le produit de convolution de deux fonctions intégrables f et g (nulle sur \mathbb{R}_-^*) comme la fonction

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt.$$

De façon analogue (si l'on se souvient qu'une intégrale est une "somme continue"), on appellera produit de convolution de deux séquences numériques f_e et g_e , la séquence numérique notée $f_e * g_e$ qui est définie par :

$$(f_e * g_e)(n) = \sum_{k=0}^n f(kT)g(nT - kT) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En effectuant le changement d'indice $k' = n - k$ dans cette expression, on remarque que

$$(f_e * g_e)(n) = \sum_{k'=n}^0 f(nT - k'T)g(k'T) = \sum_{k'=0}^n g(k'T)f(nT - k'T),$$

ce qui établit :

$$(f_e * g_e)(n) = (g_e * f_e)(n).$$

On retrouve ainsi dans le cas (discret) des séquences numériques, l'égalité $f * g = g * f$ démontrée en première année.

Avec une technique analogue à ce qui vient d'être fait (changement d'indices), on démontre par ailleurs

$$\boxed{\mathcal{Z}\{f_e * g_e\} = \mathcal{Z}\{f_e\} \times \mathcal{Z}\{g_e\}}$$

ce qui rappelle les résultats obtenus lors de l'étude des transformées de Fourier ou de Laplace, à savoir $\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\} \times \mathcal{F}\{g\}$ et $\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \times \mathcal{L}\{g\}$.

3.3 Transformation en z inverse

3.3.1 Définition

On appelle "transformation en z inverse", l'application notée \mathcal{Z}^{-1} , qui associe à la "série entière" en $\frac{1}{z}$ $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}$, la séquence numérique $f_e = (f(nT))_{n \in \mathbb{N}}$, appelée "original de F ". On écrit alors :

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F\} = f_e.$$

Il n'existe pas de formule simple donnant l'expression de \mathcal{Z}^{-1} . Pour calculer l'original d'une fonction F , on utilise les tables donnant la transformée en z des fonctions usuelles ainsi que les propriétés de \mathcal{Z} .

3.3.2 Exemples

Original de $\frac{1}{z^2 - 3z + 2}$

La décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle donne

$$\frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z - 2} - \frac{1}{z - 1},$$

ce qui entraîne évidemment

$$\frac{1}{z^2 - 3z + 2} = \frac{1}{z} \left(\frac{z}{z - 2} - \frac{z}{z - 1} \right).$$

Or, on a démontré que

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z - a} \right\} (n) = a^n \mathcal{U}(n) \text{ si } |z| > |a|,$$

ce qui permet d'écrire que

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z - 1} \right\} (n) = \mathcal{U}(n) \text{ pour } |z| > 1 \text{ et } \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z - 2} \right\} (n) = 2^n \mathcal{U}(n) \text{ pour } |z| > 2.$$

Le facteur $\frac{1}{z}$ traduisant un retard d'une unité, on a donc finalement :

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1}{z^2 - 3z + 2} \right\} (n) = (2^{n-1} - 1) \mathcal{U}(n - 1) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Original de $\frac{z + 1}{z - 1}$

Il est facile de voir que

$$\frac{z + 1}{z - 1} = \frac{z - 1 + 2}{z - 1} = 1 + \frac{2}{z - 1} = 1 + \frac{2}{z} \frac{z}{z - 1}.$$

Ensuite, comme $\mathcal{Z}^{-1}\{1\}(n) = \delta(n)$ et $\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z - 1} \right\} (n) = \mathcal{U}(n)$, on obtient

$$\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z + 1}{z - 1} \right\} (n) = \delta(n) + 2\mathcal{U}(n - 1),$$

car on sait que la multiplication par $\frac{1}{z}$ induit un retard d'une unité.

3.4 Une application de la transformation en z : les équations aux différences

3.4.1 Un exemple d'équation aux différences

Soient α, β, y_0 trois réels fixés, et f une fonction (supposée nulle sur \mathbb{R}_- , comme c'est l'usage dans ce chapitre). On cherche à connaître la fonction inconnue y , solution du problème différentiel suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} (E) & \alpha y'(t) + \beta y(t) = f(t); \\ (CI) & y(0) = y_0. \end{cases}$$

On a vu en première année que ce type de problème différentiel ((E) est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants) possède une unique solution. Mais, le calcul explicite de cette solution requiert la connaissance d'une "solution particulière", qui n'est pas toujours évidente à trouver.

De plus, dans la pratique, la fonction f n'est pas toujours entièrement connue. En effet, il s'agit souvent d'une grandeur physique mesurée à intervalles de temps $T > 0$ réguliers. A la place de la fonction f , on dispose donc seulement de la séquence numérique $f_e = (f(nT))_{n \in \mathbb{N}}$. Dans ces conditions, il est illusoire de prétendre calculer l'inconnue y à tous les instants $t \in \mathbb{R}_+$. On va se contenter de calculer la séquence numérique $y_e = (y(nT))_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour cela, on identifie $y'(nT) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(nT + \Delta t) - y(nT)}{nT + \Delta t - nT} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(nT + \Delta t) - y(nT)}{\Delta t}$ avec la différence $\frac{y(nT + T) - y(nT)}{T}$, ce qui est acceptable dès lors que T est assez petit (c'est-à-dire si l'on a échantillonné la fonction f assez "finement"). L'équation différentielle (E) devient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha \frac{y(nT + T) - y(nT)}{T} + \beta y(nT) = f(nT),$$

soit

$$\underbrace{\frac{\alpha}{T}}_a y(nT + T) + \underbrace{\left(\beta - \frac{\alpha}{T}\right)}_b y(nT) = f(nT).$$

On est ainsi amené à résoudre le "problème aux différences"

$$(P_n) \quad \begin{cases} (E_n) & ay(nT + T) + by(nT) = f(nT); \\ (CI) & y(0) = y_0. \end{cases}$$

L'équation "discrétisée" (E_n) s'appelle "équation aux différences".

Pour résoudre (P_n) pour chaque entier naturel n , appliquons la transformation en z à (E_n). Ainsi, en posant préalablement $Y = \mathcal{Z}\{y_e\}$ et $F = \mathcal{Z}\{f_e\}$, on obtient :

$$az(Y(z) - y_0) + bY(z) = F(z),$$

soit

$$Y(z) = \frac{F(z) + az y_0}{az + b}.$$

Pour obtenir y_e , il faut donc calculer $\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{F(z) + az y_0}{az + b} \right\}$ à l'aide des méthodes présentées au paragraphe précédent, en tenant compte de l'égalité $\mathcal{Z}^{-1}\{F\} = f_e$.

3.4.2 Exemple

Pour illustrer le sous-paragraphe précédent d'un exemple "concret", supposons que $T = 1$ et résolvons le "problème aux différences" suivant :

$$\begin{cases} y(n+1) + y(n) = n = n\mathcal{U}(n); & (n \in \mathbb{N}). \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

Par application de \mathcal{Z} , on obtient, en notant à nouveau Y à la place de $\mathcal{Z}\{y_e\}$:

$$z(Y(z) - \underbrace{y(0)}_0) + Y(z) = \mathcal{Z}\{(n\mathcal{U}(n))_{n \in \mathbb{N}}\}(z).$$

Or, on sait que

$$\mathcal{Z}\{(n\mathcal{U}(n))_{n \in \mathbb{N}}\}(z) = -z \left(\underbrace{\mathcal{Z}\{\mathcal{U}(n)_{n \in \mathbb{N}}\}(z)}_{\frac{z}{z-1}} \right)' = \frac{z}{(z-1)^2},$$

donc

$$Y(z) = \frac{z}{(z+1)(z-1)^2}.$$

La décomposition en éléments simples de Y s'écrit :

$$Y(z) = \frac{1}{4} \left(\frac{z}{z+1} - \frac{z}{z-1} + 2 \frac{z}{(z-1)^2} \right).$$

Or, $\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z+1} \right\}(n) = (-2)^n \mathcal{U}(n)$, $\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{z-1} \right\}(n) = \mathcal{U}(n)$ et on vient de voir que $\mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z}{(z-1)^2} \right\}(n) = n\mathcal{U}(n)$.

On obtient ainsi finalement :

$$y(n) = \frac{2n-1 + (-2)^n}{4} \mathcal{U}(n).$$

3.5 Transformation de Fourier discrète

3.5.1 Définition

En théorie du signal, vous utiliserez la notion de "transformation de Fourier discrète". Il s'agit simplement d'un cas particulier de la transformation en z . En effet, $x_e = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignant un signal discret (c'est-à-dire une séquence numérique), on appelle transformée de Fourier discrète de x_e (simplement notée TFD de x_e dans la suite), la fonction de la variable réelle λ :

$$X(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e^{-j2\pi\lambda n}.$$

On a évidemment

$$X(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \left(\frac{1}{e^{j2\pi\lambda}} \right)^n,$$

ce qui permet d'écrire

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}, X(\lambda) = \mathcal{Z}\{x_e\}(e^{j2\pi\lambda})}.$$

La TFD d'un signal (discret) est donc bien un cas particulier de transformée en z de ce signal.

3.5.2 Périodicité

Comme $e^{j2\pi(\lambda+1)} = e^{j2\pi\lambda} \times e^{j2\pi}$ pour tout réel λ , et que $e^{j2\pi} = 1$, il est clair que

$$\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}, X(\lambda + 1) = X(\lambda).}$$

La TFD de x_e est donc une fonction 1-périodique.

3.5.3 Lien avec les séries de Fourier

La fonction $\lambda \mapsto X(\lambda)$ est de période 1 et elle s'écrit comme un développement en série de Fourier (voir le cours de première année). Les coefficients x_n , $n \in \mathbb{N}$, sont donc les coefficients de Fourier complexes de la fonction X , ce qui impose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\lambda) e^{j2\pi\lambda n} d\lambda.$$

La donnée de la séquence numérique $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(\lambda) e^{j2\pi\lambda n} d\lambda \right)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir de la fonction X , s'appelle "transformation de Fourier discrète inverse".

3.6 Formulaire

On peut résumer les résultats importants de ce chapitre à l'aide du formulaire de la page suivante.

Transformée en z

$\mathbf{f}(n)$	\xrightarrow{z}	$\mathbf{F}(z)$
$\mathcal{U}(n)$ $a^n \mathcal{U}(n), a \in \mathbb{C}$		$\frac{z}{z-1}$ pour $ z > 1$ $\frac{z}{z-a}$ pour $ z > a $
$\delta(n)$ $\delta_k(n), k \in \mathbb{N}^*$		1 pour $z \in \mathbb{C}$ z^{-k} pour $z \in \mathbb{C}^*$
$\cos(n\omega T)\mathcal{U}(n), \omega \in \mathbb{R}$		$\frac{z^2 - z \cos(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$ pour $ z > 1$
$\sin(n\omega T)\mathcal{U}(n), \omega \in \mathbb{R}$		$\frac{z \sin(\omega T)}{z^2 - 2z \cos(\omega T) + 1}$ pour $ z > 1$
$\lambda f(n) + \mu g(n)$		$\lambda F(z) + \mu G(z)$
$f(nT - mT), m \in \mathbb{N}^*$		$\frac{1}{z^m} F(z)$
$f(nT + mT) m \in \mathbb{N}^*$		$z^m \left[F(z) - \sum_{p=0}^{m-1} f(pT) z^{-p} \right]$
$a^{nT} f(nT), a \in \mathbb{C}$		$F\left(\frac{z}{a^T}\right)$
$nT f(nT)$		$-zT F'(z)$
$f(n) * g(n)$		$F(z) \times G(z)$

Chapitre 4

Fonctions de plusieurs variables réelles

Dans toute la suite, n désigne un entier supérieur ou égal à 1.

4.1 Introduction

4.1.1 L'ensemble \mathbb{R}^n

Définition

\mathbb{R}^n est l'ensemble des n -uplets (x_1, x_2, \dots, x_n) , avec $x_i \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. C'est-à-dire :

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

Egalité dans \mathbb{R}^n

Deux points $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ de \mathbb{R}^n sont égaux si et seulement si

$$x_i = x'_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

On note alors simplement $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$.

4.1.2 Généralités sur les fonctions de plusieurs variables

Définition

On appelle fonction de n -variables toute application d'un sous-ensemble \mathcal{D} de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R} :

$$\begin{array}{ccc} f : & \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{array}$$

\mathcal{D} s'appelle l'ensemble de définition de f .

Exemples.

a) $f(x, y) = \arcsin(x + y)$. Le domaine de f est $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x + y \leq 1\}$. Il est donc constitué par tous les points de \mathbb{R}^2 situés entre les droites d'équations cartésiennes $y = -x \pm 1$.

b) $g(x, y, z) = \ln(x^2 - 2x + y^2 + z^2)$. On remarque que $g(x, y, z) = \ln((x-1)^2 + y^2 + z^2 - 1)$, et donc que le domaine de g est $\mathcal{D}_g = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x-1)^2 + y^2 + z^2 > 1\}$. Il s'agit donc de tous les points de \mathbb{R}^3 appartenant à l'extérieur de la sphère de centre $(1, 0, 0)$ et de rayon 1.

Représentation des fonctions de 2 variables

Considérons la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y). \end{aligned}$$

L'ensemble

$$\mathcal{S} = \{(x, y, f(x, y)), (x, y) \in \mathcal{D}\}$$

est une surface de \mathbb{R}^3 , dont l'équation cartésienne est définie comme suit :

$$\begin{cases} (x, y) \in \mathcal{D} \\ z = f(x, y). \end{cases}$$

Soit ensuite C un nombre réel. On note \mathcal{P}_C le plan horizontal d'équation cartésienne $z = C$:

$$\mathcal{P}_C = \{(x, y, C), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Ainsi, suivant les valeurs prises par C , l'intersection de \mathcal{S} et de \mathcal{P}_C , à savoir

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_C = \{(x, y, C), (x, y) \in \mathcal{D} \text{ vérifie } f(x, y) = C\},$$

est soit vide, soit réduite à un point, soit une courbe incluse dans le plan \mathcal{P}_C .

Lorsque C parcourt \mathbb{R} , l'ensemble formé par toutes ces courbes est appelé "ensemble des courbes de niveau" de \mathcal{S} .

Exemple. Soient a et b deux réels fixés et $f(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2$ une fonction définie sur \mathbb{R}^2 . Pour tout réel C , on a, en reprenant les notations précédentes,

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_C = \{(x, y, C), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ vérifie } (x-a)^2 + (y-b)^2 = C\}.$$

Par suite, $\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_C$ est

- l'ensemble vide, si $C < 0$;
- le cercle de centre (a, b, C) et de rayon \sqrt{C} contenu dans le plan $z = C$ si $C \geq 0$.

On peut remarquer que ce cercle dégénère en le point $(a, b, 0)$ lorsque $C = 0$.

4.1.3 Continuité

Notion de distance dans \mathbb{R}^n

Définition. On appelle distance dans \mathbb{R}^n , toute application $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}_+$, qui vérifie les trois propriétés suivantes :

1. $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (symétrie) ;
2. $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$ (séparation) ;
3. $\forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ (inégalité triangulaire).

Exemples. Les distances les plus communément utilisées dans \mathbb{R}^n sont définies, pour chaque $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et chaque $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^n , par :

$$- d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|;$$

$$- d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2};$$

$$- d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup \{|x_i - y_i|, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

On pourra vérifier à titre d'exercice, que d_1 , d_2 et d_∞ sont bien des distances dans \mathbb{R}^n .

Remarque. Dans le cas particulier où $n = 1$, ces trois distances sont égales.

Boule ouverte associée à une distance d . Soient d une distance dans \mathbb{R}^n , $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ un point de \mathbb{R}^n et $r_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle boule ouverte dans \mathbb{R}^n de centre \mathbf{x}^0 et de rayon r_0 , associée à la distance d , l'ensemble

$$B_d(\mathbf{x}^0, r_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < r_0\}.$$

On note $B_1(\mathbf{x}^0, r_0)$ (resp. $B_2(\mathbf{x}^0, r_0)$, $B_\infty(\mathbf{x}^0, r_0)$) la boule ouverte dans \mathbb{R}^n de centre \mathbf{x}^0 et de rayon r_0 , associée à la distance d_1 (resp. d_2 , d_∞).

Exemples. Plaçons-nous dans le cas où $n = 2$. Quels que soient $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0) \in \mathbb{R}^2$ et $r_0 > 0$, $B_2(\mathbf{x}^0, r_0)$ est l'intérieur du disque de centre \mathbf{x}^0 et de rayon r_0 , alors que $B_\infty(\mathbf{x}^0, r_0)$ est l'intérieur du carré de centre \mathbf{x}^0 et de côté $2r_0$.

Continuité en un point

Soient $f : (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une fonction définie sur un sous-ensemble \mathcal{D} de \mathbb{R}^n et $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ un point de \mathcal{D} . On dit que f est continue en \mathbf{x}^0 si

$$\lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}^0 \\ \mathbf{x} \in \mathcal{D}}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0).$$

Autrement dit, f est continue en \mathbf{x}^0 si, à tout réel $\varepsilon > 0$ (aussi petit que l'on veut), on peut associer un réel $r_\varepsilon > 0$ satisfaisant la condition suivante :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}, \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}^0, r_\varepsilon) \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)| \leq \varepsilon.$$

Lorsque la fonction f est continue en tout point \mathbf{x} de $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$, on dit que f est continue sur \mathcal{D}' , et l'on note alors $f \in C^0(\mathcal{D}')$.

Remarque. Dans la définition précédente, il suffit que la condition $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0)| \leq \varepsilon$ soit satisfaite pour tous les éléments d'une boule ouverte $B(\mathbf{x}^0, r_\varepsilon)$ associée à n'importe quelle distance d dans \mathbb{R}^n . En effet, on peut démontrer (ce n'est pas au programme de GTR) que si cette condition est vérifiée pour une distance particulière d , alors elle l'est automatiquement pour toutes les distances.

Exemple. La fonction $f(x, y) = 2x + y$, qui est définie sur \mathbb{R}^2 , est continue en tout point $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. En effet, le point $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ étant fixé, on a, pour tout $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = 2|x - x_0| + |y - y_0| \leq 2d_1(M, M_0).$$

Ainsi, quel que soit le réel ε arbitrairement fixé dans \mathbb{R}_+^* , on aura bien $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \varepsilon$ pour tout point $M \in B_1(M_0, \frac{\varepsilon}{2})$. Cela montre que la fonction f est continue sur \mathbb{R} .

Résultats. Comme dans le cas d'une fonction d'une variable réelle, on vérifie facilement que la définition précédente entraîne :

1. si f est continue en \mathbf{x} alors λf est continue en \mathbf{x} pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. si f et g sont continues en \mathbf{x} alors $f + g$ et fg sont continues en \mathbf{x} .
3. si f est continue en \mathbf{x} et que $f(\mathbf{x}) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est continue en \mathbf{x} .

Remarque importante. Autre conséquence de cette définition de la continuité : si la fonction de deux variables, f , est continue au point (x_0, y_0) , alors :

- $x \mapsto f(x, y_0)$ est une fonction (d'une seule variable) continue au point x_0 ;
- $y \mapsto f(x_0, y)$ est une fonction (d'une seule variable) continue au point y_0 .

Par contre, la réciproque est fautive. En d'autres termes, il ne suffit pas que f_{y_0} soit continue en x_0 et que f_{x_0} soit continue en y_0 pour que la fonction de deux variables f soit continue en (x_0, y_0) .

Pour s'en convaincre, considérons la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

On remarque que $y \mapsto f(0, y)$ est nulle sur \mathbb{R} . C'est donc une fonction continue en $y = 0$. De même $x \mapsto f(x, 0)$ est nulle sur \mathbb{R} donc cette fonction est continue en $y = 0$.

Et pourtant, la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)$ n'est pas continue en $(0, 0)$. En effet, pour tout x appartenant à \mathbb{R}^* , l'expression de $f(x, y)$ lorsque $x = y$ devient $f(x, x) = \frac{1}{2}$. Ainsi, si l'on choisit $\varepsilon = \frac{1}{4}$ par exemple, l'égalité $f(x, x) = \frac{1}{2}$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, prouve qu'il n'existe aucune boule centrée en $(0, 0)$ à l'intérieur de laquelle f a toutes ses valeurs inférieures à ε . En effet, f prend la valeur $\frac{1}{2}$ sur la droite d'équation cartésienne $y = x$, qui rencontre l'intérieur de n'importe quel disque centré en $(0, 0)$. Ceci montre bien que la fonction f n'est pas continue en $(0, 0)$.

4.1.4 Dérivabilité

Dérivées partielles

Cas de deux variables. Soient $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ une fonction définie sur un sous-ensemble \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 et $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de \mathcal{D} . On appelle :

- dérivée partielle de f par rapport à x au point (x_0, y_0) , la dérivée de la fonction d'une variable $f_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$ au point x_0 , si elle existe. Dans ce cas, on la note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou $\partial_x f(x_0, y_0)$.
- dérivée partielle de f par rapport à y au point (x_0, y_0) , la dérivée de la fonction d'une variable $f_{x_0} : y \mapsto f(x_0, y)$ au point y_0 , si elle existe. Dans ce cas, on la note $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ou $\partial_y f(x_0, y_0)$.

Autrement dit, si l'on suppose que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existent,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = (f_{y_0})'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{y_0}(x_0 + h) - f_{y_0}(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = (f_{x_0})'(y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{x_0}(y_0 + h) - f_{x_0}(y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Lorsque f possède une dérivée partielle par rapport à x en tout point (x, y) de $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$, on peut alors définir la fonction "dérivée partielle de f par rapport à x ", notée simplement $\frac{\partial f}{\partial x}$, et définie par

$$\frac{\partial f}{\partial x} \begin{cases} \mathcal{D}' & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{cases}$$

De même, si f possède une dérivée partielle par rapport à y en tout point (x, y) de $\mathcal{D}'' \subset \mathcal{D}$, la fonction

$$\frac{\partial f}{\partial y} \begin{cases} \mathcal{D}'' & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

est appelée "dérivée partielle de f par rapport à y ".

Généralisation au cas de n variables. Soient f une fonction définie sur un sous-ensemble \mathcal{D} de \mathbb{R}^n ,

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

et $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ un point de \mathcal{D} .

Fixons maintenant i dans $\{1, 2, \dots, n\}$. On dit que f possède une dérivée partielle par rapport à x_i au point $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ si la fonction (d'une variable)

$$t \mapsto f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, t, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)$$

est dérivable au point $t = x_i^0$.

Dans ce cas, la dérivée partielle de f par rapport à x_i au point $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ ou bien $\partial_{x_i} f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, et on a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0 + h, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i^0, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0)}{h}.$$

En d'autres termes :

On dérive (dans \mathbb{R}) par rapport à x_i , en maintenant toutes les autres variables constantes.

Si f possède une dérivée partielle par rapport à x_i en tout point (x_1, x_2, \dots, x_n) d'un sous-ensemble \mathcal{D}_i de \mathcal{D} , on définit la fonction "dérivée partielle de f par rapport à x_i " par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \begin{cases} \mathcal{D}_i & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

Lorsque toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, sont continues sur un sous-ensemble \mathcal{D}' de \mathcal{D} , f est dite de classe C^1 sur \mathcal{D}' . Et l'on note alors $f \in C^1(\mathcal{D}')$.

Remarque. $f \in C^1(\mathcal{D}) \implies f \in C^0(\mathcal{D})$.

Exemples.

a) $f(x, y) = 2x^3 + y^2 + xy$. Quel que soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé, la fonction $f_{x_0}(y) = 2x_0^3 + y^2 + x_0y$ est dérivable sur \mathbb{R} , car c'est une fonction polynômiale (en y). Et on a évidemment :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = (f_{x_0})'(y) = 2y + x_0.$$

De la même façon, la fonction $f_{y_0}(x) = 2x^3 + y_0^2 + y_0x$ est polynômiale (en x) donc dérivable sur \mathbb{R} entier, et l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = 6x^2 + y_0.$$

b) $g(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^4)$. Comme la fonction $\varphi : (x, y) \mapsto 1 + x^2 + y^4$ est un polynôme (en x et y), elle admet (voir l'exemple a)) des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y en tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 . Ensuite, l'image de φ , à savoir l'ensemble $\varphi(\mathbb{R}^2) = \{t \in \mathbb{R}, t = \varphi(x, y) \text{ pour } (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, est inclus dans $[1, +\infty[$, donc dans \mathbb{R}_+^* , qui est le domaine de définition de la fonction $t \mapsto \ln(t)$. Comme la fonction logarithme est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , la fonction $g = \ln \circ \varphi$ admet forcément des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y en tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 . Un calcul simple montre alors que pour chaque point (x, y) de \mathbb{R}^2 :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{1 + x^2 + y^4}$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{4y^3}{1 + x^2 + y^4}.$$

4.1.5 Dérivées d'ordre supérieur

Soit f une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur un sous-ensemble \mathcal{D} de \mathbb{R}^2 . Lorsque les fonctions

$$(x, y) \mapsto \partial_x f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad (x, y) \mapsto \partial_y f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

possèdent des dérivées partielles, on pose :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial(\partial_x f)}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial(\partial_x f)}{\partial y}(x, y)$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial(\partial_y f)}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial(\partial_y f)}{\partial y}(x, y).$$

Et quand toutes ces nouvelles dérivées partielles (dites du second ordre) sont continues sur \mathcal{D} , la fonction f est dite de classe C^2 sur \mathcal{D} , ce que l'on note alors $f \in C^2(\mathcal{D})$.

Dans ce cas, on dispose alors du théorème fondamental (admis) suivant :

THÉORÈME DE SCHWARZ. – Si les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues en (x_0, y_0) , alors on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Plus généralement, dans le cas d'une fonction de n variables, le théorème de Schwarz impose

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0),$$

à condition que les fonctions $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ soient continues au point $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Exemple. Reprenons l'exemple a) de la section précédente. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a vu que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x^2 + y$. Cette fonction est polynômiale (en x, y) donc elle possède des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y en tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 12x \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1.$$

La fonction $(x, y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ est constante sur \mathbb{R}^2 , donc elle est continue sur \mathbb{R}^2 .

Par ailleurs, comme $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + x$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1.$$

On retrouve donc, sur cet exemple, que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$, ce qui était prévu par le théorème de Schwarz.

Application : dérivation composée

Soit f une fonction de deux variables de classe C^1 sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. On considère ensuite deux fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ définies sur un intervalle I de \mathbb{R} telles que

$$\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in \mathcal{D},$$

ce qui permet de définir la fonction composée

$$F(t) = f[x(t), y(t)], \quad \forall t \in I.$$

Si l'on dispose d'assez de temps, on démontrera en T.D. le résultat suivant :

THÉORÈME 1. – La fonction F est dérivable sur I et, pour tout $t \in I$, sa dérivée s'écrit :

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}[x(t), y(t)] \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}[x(t), y(t)] \times y'(t).$$

Ce résultat nous servira notamment à démontrer les théorèmes 3 et 4 qui vont suivre.

4.1.6 Formule des accroissements finis

Rappel

Rappelons l'énoncé de la "formule des accroissements finis" pour les fonctions réelles d'une variable réelle.

THÉORÈME 2. – Soit f une fonction d'une variable réelle à valeurs dans \mathbb{R} , continue sur l'intervalle fermé $[a, a + h]$ (où $h > 0$) et dérivable sur $]a, a + h[$.

Alors, il existe (au moins) un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \theta h).$$

Nous allons maintenant généraliser ce résultat au cas d'une fonction de deux variables.

Cas d'une fonction de deux variables

THÉORÈME 3. – Soit f une fonction de deux variables réelles, continue sur $[a, a + h] \times [b, b + k]$ (où $h > 0$ et $k > 0$) et de classe C^1 sur $]a, a + h[\times]b, b + k[$. Alors, il existe (au moins) un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(a + h, b + k) - f(a, b) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta h, b + \theta k) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a + \theta h, b + \theta k).$$

Démonstration. Pour tout $t \in [0, 1]$, posons $F(t) = f(a + th, b + tk)$. La fonction F est continue sur $[0, 1]$ et, le théorème 1 garantit (il suffit de poser $x(t) = a + th$ et $y(t) = b + tk$) qu'elle est dérivable sur $]0, 1[$ avec, pour chaque $t \in]0, 1[$:

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a + th, b + tk)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a + th, b + tk)k.$$

Comme F est une fonction d'une seule variable, le théorème 2 peut ensuite s'appliquer : il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\underbrace{F(1)}_{f(a+h, b+k)} - \underbrace{F(0)}_{f(a, b)} = (1 - 0)F'(\theta),$$

ce qui achève la démonstration. ■

Conséquences

On peut déduire du théorème précédent deux conséquences simples (mais importantes) suivantes :

1. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in]a, a + h[\times]b, b + k[$, alors la fonction f ne dépend que de y . Plus précisément, il existe une fonction $\varphi :]b, b + k[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x, y) \in]a, a + h[\times]b, b + k[, f(x, y) = \varphi(y).$$

2. Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in]a, a + h[\times]b, b + k[$, alors la fonction f est constante sur le pavé $]a, a + h[\times]b, b + k[$.

Autrement dit :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \right) \implies (\exists C \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in]a, a + h[\times]b, b + k[, f(x, y) = C).$$

4.1.7 Formule de Taylor à l'ordre 2

Énoncé du résultat

Le théorème 2 permet de justifier le résultat suivant, appelé "formule de Taylor à l'ordre 2" pour les fonctions d'une seule variable réelle :

si $f \in C^0(]a, a + h[) \cap C^2(]a, a + h[)$ (où $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$), alors, pour chaque $t \in]0, h[$, il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(a + t) = f(a) + f'(a)t + \frac{1}{2}f''(a + \theta h)t^2.$$

Comme nous allons le voir maintenant, on peut généraliser cette formule au cas des fonctions de deux variables réelles.

THÉORÈME 4. – Soit f une fonction de deux variables réelles, continue sur $[a, a + h] \times [b, b + k]$ (avec $h > 0$ et $k > 0$) et de classe C^2 sur $]a, a + h[\times]b, b + k[$.

Alors, il existe (au moins) un réel $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) + \frac{1}{2} \left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + \theta h, b + \theta k) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + \theta h, b + \theta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + \theta h, b + \theta k) \right].$$

Démonstration. Pour tout $t \in [0, 1]$, la fonction $F(t) = f(a + th, b + tk)$ définie sur $[0, 1]$, vérifie les hypothèses de la formule de Taylor à l'ordre 2 (énoncée précédemment pour les fonctions d'une seule variable réelle). Il existe donc $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\theta).$$

Or, le théorème 1 nous dit que

$$\forall t \in]0, 1[, F'(t) = h \frac{\partial f}{\partial x}(a + th, b + tk) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a + th, b + tk).$$

Comme $f \in C^2(]a, a + h[\times]b, b + k[)$, ce même théorème 1 s'applique à nouveau à la dérivée F' . On obtient ainsi, pour tout $t \in]0, 1[$,

$$F''(t) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a + th, b + tk) + hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + th, b + tk) + kh \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + th, b + tk) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a + th, b + tk).$$

Enfin, comme f est de classe C^2 sur $]a, a + h[\times]b, b + k[$, le théorème de Schwarz nous donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a + th, b + tk) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a + th, b + tk),$$

ce qui termine la démonstration. ■

Application à la recherche d'extrema locaux

Dans toute la suite, f désigne une fonction de deux variables, définie sur $]x_0 - H, x_0 + H[\times]y_0 - K, y_0 + K[$ où $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $H > 0, K > 0$.

Définition. On dit que (x_0, y_0) est un maximum local (resp. minimum local) de f , s'il existe $\Delta x \in]0, H[$ et $\Delta y \in]0, K[$ tels que

$$\forall (x, y) \in]x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x[\times]y_0 - \Delta y, y_0 + \Delta y[, f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (\text{resp. } f(x, y) \geq f(x_0, y_0)).$$

Les minima ou les maxima locaux de la fonction f sont appelés "extrema locaux" de f .

Condition nécessaire d'existence d'un extrémum local. Si (x_0, y_0) est un extrémum local de f , alors, on a forcément :

- x_0 est un extrémum local de la fonction (d'une variable) $x \mapsto f(x, y_0)$;
- y_0 est un extrémum local de la fonction (d'une variable encore) $y \mapsto f(x_0, y)$.

Cela justifie le résultat suivant :

THÉORÈME 5. — Si f possède des dérivées partielles au point (x_0, y_0) , alors :

$$(x_0, y_0) \text{ est un extrémum local de } f \implies \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \right).$$

Tout point $(x, y) \in]x_0 - H, x_0 + H[\times]y_0 - K, y_0 + K[$ en lequel f possède des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ qui sont nulles, s'appelle un point stationnaire de f .

Ainsi, le théorème 5 dit simplement que les extrema locaux de f (supposée posséder des dérivées partielles en tout point de $]x_0 - H, x_0 + H[\times]y_0 - K, y_0 + K[$) sont à chercher parmi les points stationnaires de f .

Attention : il n'y a pas de réciproque à ce résultat. Autrement dit, un point stationnaire de f n'est pas forcément un extrémum local de f .

Pour le voir, considérons la fonction $f(x, y) = xy$ définie sur \mathbb{R}^2 . On a bien

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

et pourtant $(0, 0)$ n'est pas un extrémum local de f puisque $f(0, 0) = 0$ alors que $f(x, y) < 0$ lorsque $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_-^*) \cup (\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+^*)$ et $f(x, y) > 0$ lorsque $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \cup (\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_-^*)$.

Etude locale au voisinage d'un point stationnaire. Supposons que $f \in C^2(]x_0 - H, x_0 + H[\times]y_0 - K, y_0 + K[)$ et que (x_0, y_0) est un point stationnaire de f .

Comment savoir si (x_0, y_0) est un extrémum local de f ?

Pour tout $(x, y) \in]x_0 - H, x_0 + H[\times]y_0 - K, y_0 + K[$, la fonction f est de classe C^2 sur $[x_0, x] \times [y_0, y]$, donc le théorème 4 s'applique : il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \underbrace{h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}_0 + \underbrace{k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}_0 + \frac{1}{2} \left[h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \right],$$

où l'on a posé $h = x - x_0$ et $k = y - y_0$.

Autrement dit, on a

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)}_{P(h, k)} \right) + (h^2 + k^2)\varepsilon(h, k),$$

avec bien sûr

$$\begin{aligned} 2\varepsilon(h, k) = & \frac{h^2}{h^2 + k^2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \right] \\ & + \frac{2hk}{h^2 + k^2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right] \\ & + \frac{k^2}{h^2 + k^2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \right]. \end{aligned}$$

Comme f est de classe C^2 sur $]x_0 - H, x_0 + H[\times]y_0 - K, y_0 + K[$, les fonctions $(x, y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$, $(x, y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ sont continues au point (x_0, y_0) , donc :

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} \varepsilon(h, k) = 0.$$

Ceci montre que le signe de $(x, y) \mapsto f(x, y) - f(x_0, y_0)$, lorsque (x, y) est proche de (x_0, y_0) (c'est-à-dire lorsque h et k sont proches de 0) est déterminé par celui de $P(h, k)$.

Etude du signe de $P(h, k)$. Pour tout $k \neq 0$, posons $u = \frac{h}{k}$, de sorte que

$$P(h, k) = k^2 \left[\underbrace{u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2u \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)}_{T(u)} \right].$$

Le signe de $P(h, k)$ est donc celui de $T(u)$. Or, le discriminant réduit de ce trinôme s'écrit

$$\Delta' = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0),$$

et il est bien connu que :

- si $\Delta' < 0$: $u \mapsto T(u)$ garde un signe constant ;
- si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$: T est positif, donc (x_0, y_0) est un minimum local de f ;
- si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$: T est négatif, donc (x_0, y_0) est un maximum local de f ;
- si $\Delta' > 0$: $u \mapsto T(u)$ change de signe, donc (x_0, y_0) n'est pas un extrémum local de f ;
- si $\Delta' = 0$: on ne peut pas prévoir si T change de signe ou s'il garde un signe constant, ce qui empêche de conclure directement. Pour cela, il faudrait "pousser" le développement de Taylor de la fonction f en (x_0, y_0) jusqu'à l'ordre 3 au moins.