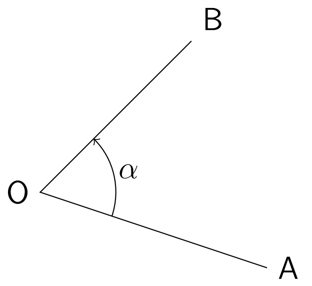
Mathématiques des transmissions

Table des matières

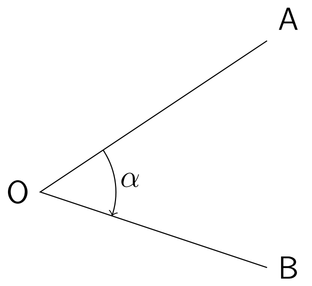
1 Trigonométrie

1.1 Angle orienté

Un *angle orienté* $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est défini par deux vecteurs du plan $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ayant même point origine O. Il est mesuré en *radians* dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, appelé *sens trigonométrique*.



$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha > 0$$



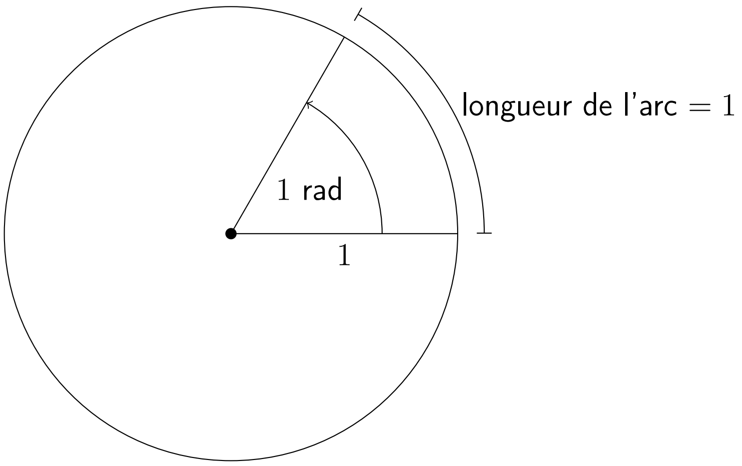
$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha < 0$$

De plus, on a évidemment :
$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = -(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

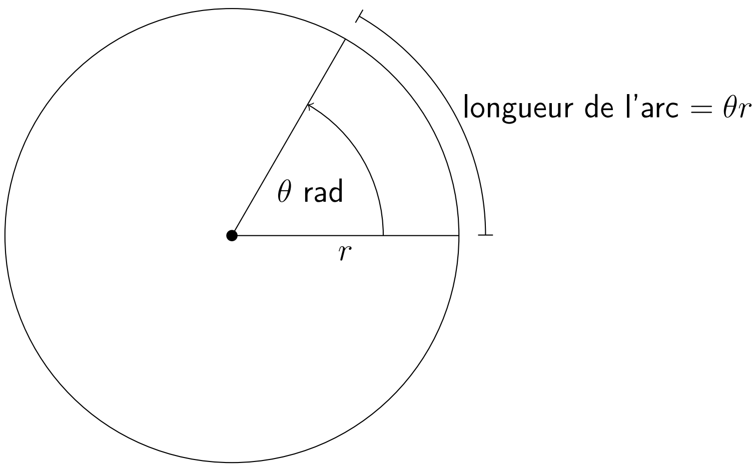
Remarque 1. La mesure associée à un angle géométrique (non orienté) est toujours positive. Par contre la mesure des angles orientés dans le sens inverse trigonométrique ont une mesure négative.

1.1.1 Unité de mesure

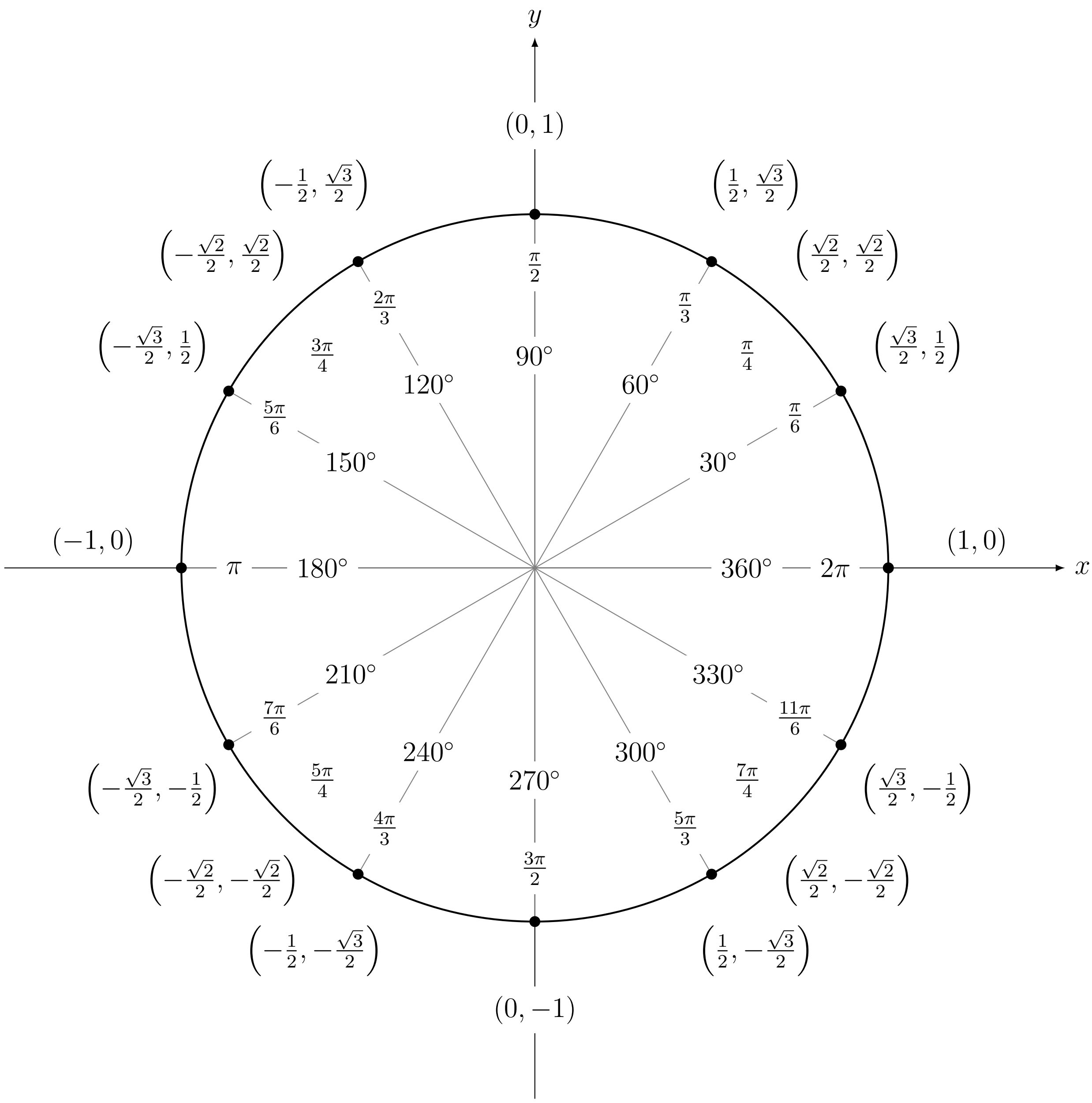
Comme déjà annoncé plus haut, l'unité de mesure d'un arc orienté est le *radian*, qui peut être définie en considérant le cercle centré à l'origine et de rayon 1, appelé *cercle trigonométrique*. En effet, la mesure de l'angle formé par l'origine et les deux extrémités d'un arc de longueur 1 pris sur le (contour du) cercle trigonométrique est, par définition, 1 radian (cela signifie qu'en disposant une ficelle de longueur 1 sur le contour du cercle trigonométrique, la mesure de l'angle formé par l'origine et les deux extrémités de la ficelle est 1 radian).



Remarque 2. Sur le cercle centré à l'origine et de rayon $r > 0$, noté $C(0, r)$ dans la suite (de sorte que $C(0, 1)$ désigne le cercle trigonométrique), un angle de mesure θ radians est donc obtenu à partir d'un arc de longueur θr.



Le périmètre du cercle trigonométrique $C(0, 1)$ étant 2π, la mesure d'un angle (géométrique) de $360°$ (qui correspond à un tour complet) est donc 2π radians, ce qui nous donne la correspondance suivante entre les mesures d'angle en *degrés* et en radians :



1.1.2 Mesure principale

Étant donné $\theta \in \mathbb{R}$, on voit que les nombres réels $\theta + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$, sont les mesures d'un même angle orienté. Ceci montre qu'un angle orienté admet une infinité de mesures, qui se déduisent les unes des autres par addition d'un multiple entier relatif de 2π (ce que l'on traduit en disant que les mesures d'un même angle orienté sont égales modulo 2π).
La *mesure principale* d'un angle orienté est celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

Exemple 1. La mesure principale de $\theta = \frac{37\pi}{11}$ est l'unique réel $\theta_0 \in]-\pi, \pi]$ tel qu'il existe $k_0 \in \mathbb{Z}$ pour lequel on a $\theta = \theta_0 + 2k_0\pi$. Pour calculer θ_0, il suffit donc de déterminer l'unique entier relatif k_0 satisfaisant la double inégalité $-\pi < \theta - 2k_0\pi \leq \pi$, c'est-à-dire

$$-\pi < \frac{37\pi}{11} - 2k_0\pi \leq \pi \iff -1 < \frac{37}{11} - 2k_0 \leq 1 \iff -1 - \frac{37}{11} < -2k_0 \leq 1 - \frac{37}{11}.$$

Ceci donne $-\frac{48}{11} < -2k_0 \leq -\frac{26}{11}$, ou bien encore $\frac{13}{11} \leq k_0 < \frac{24}{11}$, soit finalement $k_0 = 2$ (puisque $\frac{13}{11} > 1$ et que $2 < \frac{24}{11} < 3$). La mesure principale de l'angle de mesure $\frac{37\pi}{11}$ est donc

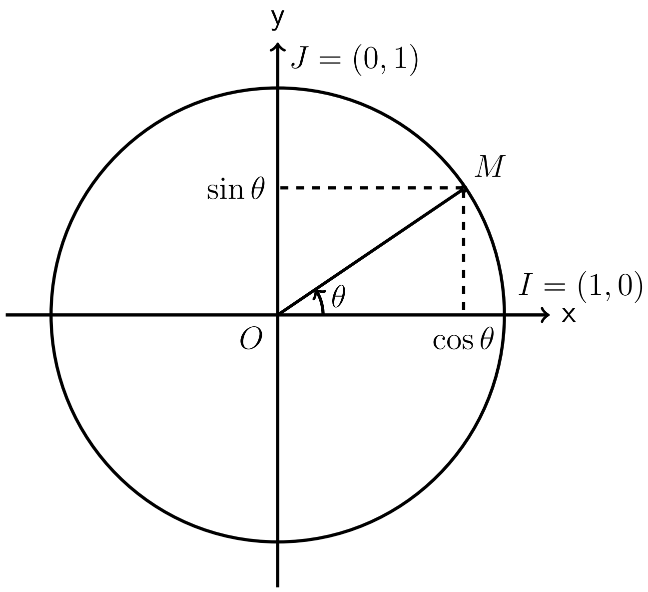
$$\frac{37\pi}{11} - 4\pi = -\frac{7\pi}{11}.$$

1.2 Les fonctions trigonométriques

1.2.1 Les fonctions sinus et cosinus

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ et l'on oriente le cercle trigonométrique $C(0,1)$ dans le sens direct.
Soit M un point de $C(0,1)$ et θ une mesure (en radians) de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$.

Définition. On appelle sinus de θ, noté $\sin\theta$, l'ordonnée du point M, et cosinus de θ, noté $\cos\theta$, est l'abscisse de M.



Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, il résulte directement de ces définitions que

$$-1 \leq \sin\theta \leq 1, \ -1 \leq \cos\theta \leq 1,$$

et du théorème de Pythagore, que

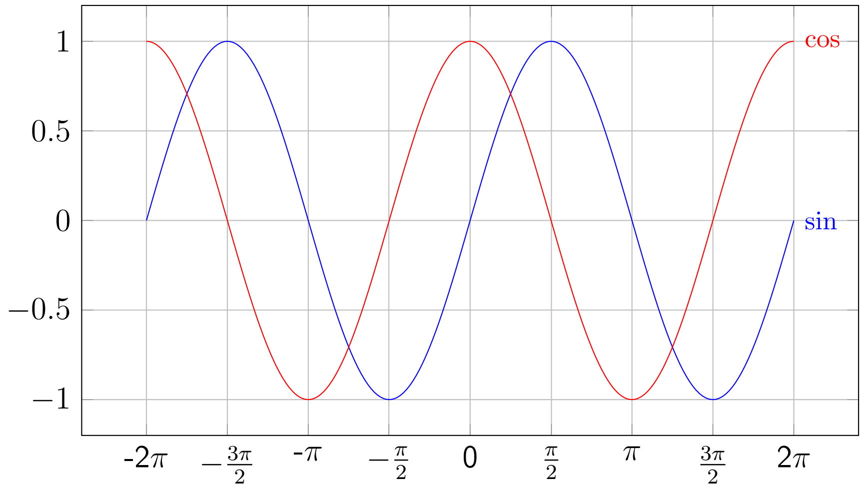
$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1. \tag{1}$$

Voici quelques valeurs remarquables de sinus et cosinus (à connaître) :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

La fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout réel θ associe son sinus, $\theta \mapsto \sin\theta$, est appelée *fonction sinus* et elle est notée $\sin$. La fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui à tout réel θ associe son cosinus, $\theta \mapsto \cos\theta$, est appelée *fonction cosinus* et elle est notée $\cos$.

Représentation graphique. Voici l'allure du graphe des fonctions $\sin$ et $\cos$ sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$:



On remarque en particulier que le graphe de la fonction $\sin$ se déduit de celui de la fonction $\cos$ par une translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$, où l'on a posé $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$.

Propriétés. Les propriétés suivantes se déduisent directement de la définition des fonctions $\sin$ et $\cos$.

i) Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont 2π-périodiques :

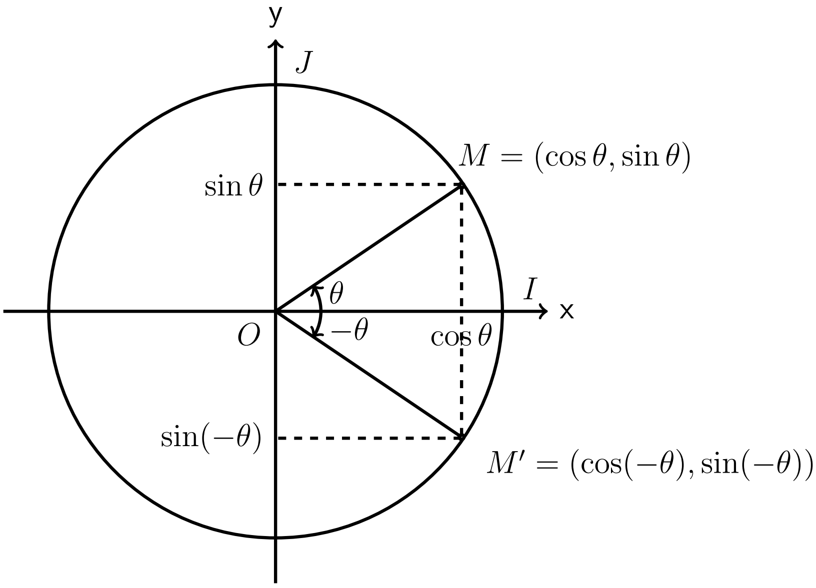
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ \sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta, \ \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta.$$

Cela se traduit graphiquement par le fait que les représentations des fonctions $\sin$ et $\cos$ sont invariantes par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

ii) La fonction $\sin$ est *impaire* alors que la fonction $\cos$ est *paire* :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ \sin(-\theta) = -\sin\theta, \ \cos(-\theta) = \cos\theta.$$

Ces deux propriétés s'obtiennent facilement à partir de la figure suivante :

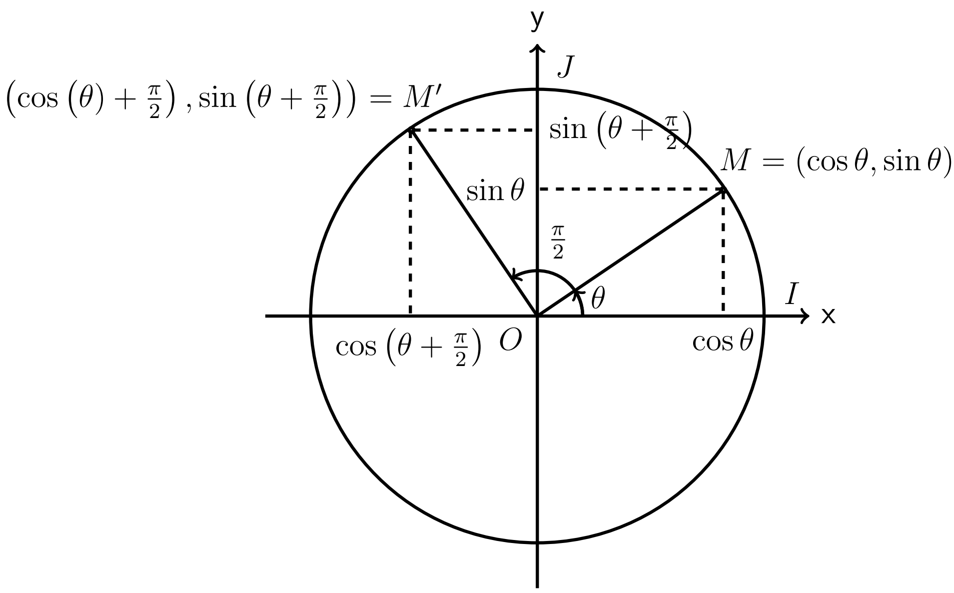


Elles signifient que la courbe représentative de la fonction $\sin$ est symétrique par rapport à l'origine O, alors que celle de la fonction $\cos$ est symétrique par rapport à l'ace $(0x)$.

iii) Effet d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$:

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta,\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta.$$

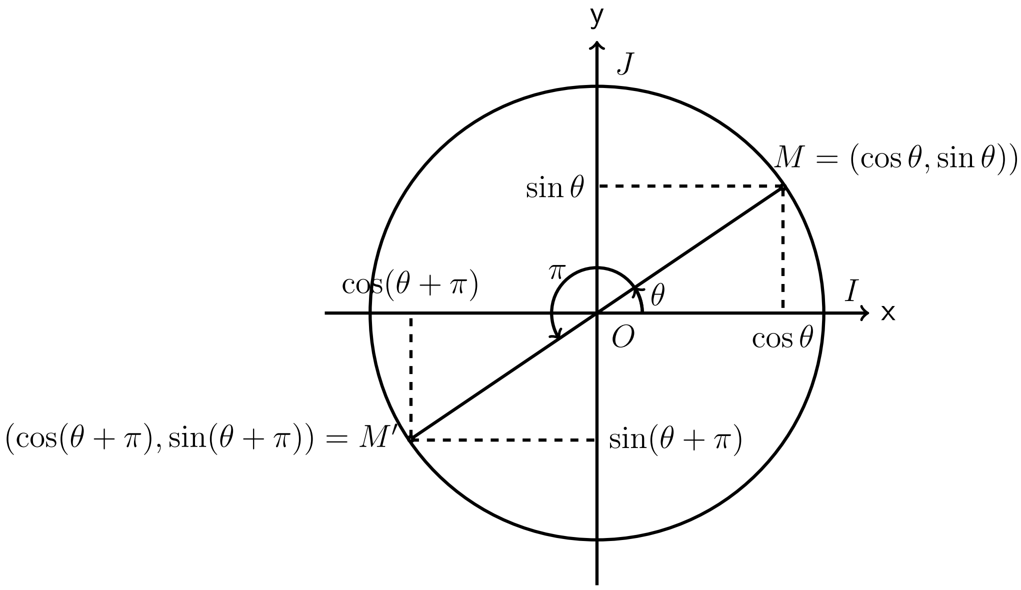
Ces égalités se déduisent facilement de la représentation suivante :



iv) Effet d'une rotation d'angle π :

$$\forall\theta \in \mathbb{R},\ \sin(\theta + \pi) = -\sin\theta,\ \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta.$$

Là encore, ces deux égalités s'obtiennent simplement à partir du dessin suivant :



Remarque 3. À partir des propriétés précédentes on déduit facilement pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(-\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\theta) = \cos\theta,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\left(-\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(-\theta) = \sin\theta,$$

et

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(-\theta + \pi) = -\sin(-\theta) = \sin\theta,$$

$$\cos(\pi - \theta) = \cos(-\theta + \pi) = -\cos(-\theta) = -\cos\theta.$$

On voit en particulier que l'égalité

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

implique que le graphe de $\sin$ s'obtient à partir de celui de $\cos$ par une translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$, ce qu'on avait déjà remarqué plus haut en visualisant la représentation graphique de ces deux fonctions.

Formules d'addition et de duplication. Les *formules* suivantes (dites *d'addition*, qui sont admises pour l'instant), disent que pour tous a et b réels, on a

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \tag{2}$$

et

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \tag{3}$$

En prenant $a = b$ dans les égalités (2)-(3), on obtient les *formules de duplication* suivantes :

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a \tag{4}$$

et

$$\cos(2a) = (\cos a)^2 - (\sin a)^2 = \cos^2 a - \sin^2 a. \tag{5}$$

En combinant (1) avec (5), on obtient ensuite facilement que

$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1, \tag{6}$$

ce qui donne *in fine* que

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2} \text{ et } \cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2}. \tag{7}$$

Remarque 4. Des formules d'addition (2)-(3) et des propriétés de parité des fonctions trigonométriques, on déduit facilement que

$$\sin(a-b) = \sin a\cos(-b) + \cos a\sin(-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b \tag{8}$$

et

$$\cos(a-b) = \cos a\cos(-b) - \sin a\sin(-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b. \tag{9}$$

En additionnant (2) à (8), puis en divisant les deux membres de l'égalité obtenue par 2, on obtient ainsi que

$$\sin a\cos b = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}. \tag{10}$$

De même, si l'on additione (3) à (9), puis que l'on divise les deux membres de l'égalité obtenue par 2, on trouve

$$\cos a\cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}, \tag{11}$$

et si l'on soustrait (9) à (3) et que l'on divise encore une fois les deux membres de l'égalité obtenue par 2, il vient

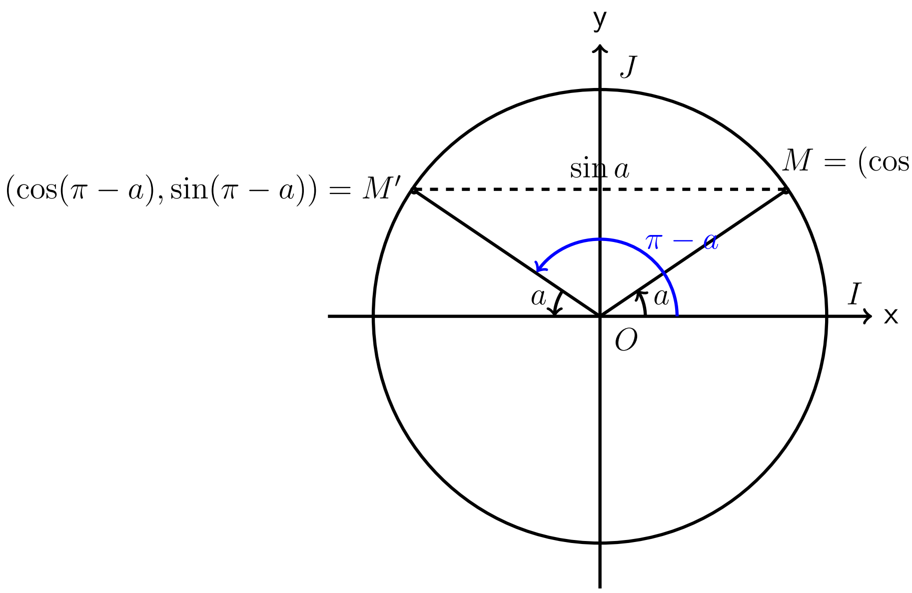
$$\sin a\sin b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}. \tag{12}$$

On constate que l'on retrouve bien (7) en prenant $a = b$ dans (11)-(12).

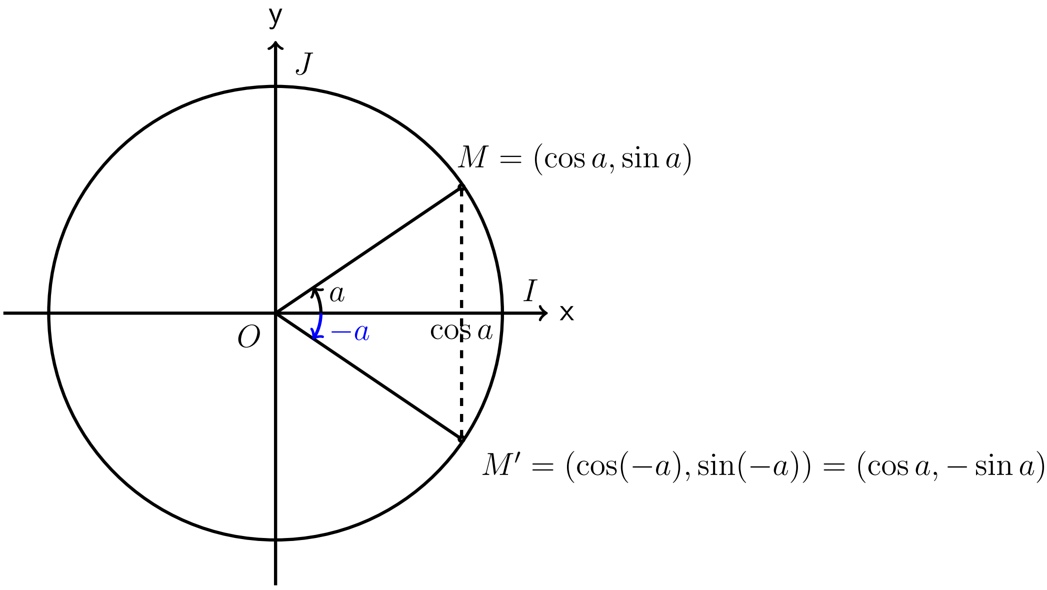
1.2.2 Équations trigonométriques

Soit a un réel fixé.

a) L'ensemble des solutions de l'équation $\sin\theta = \sin a$ est celui des nombres réels de la forme $a + 2k\pi$ et $\pi - a + 2k\pi$, où k décrit $\mathbb{Z}$.



b) L'ensemble des solutions de l'équation $\cos\theta = \cos a$ est formé par les réels $\pm a + 2k\pi$, où k décrit $\mathbb{Z}$.



Exemple 2. En utilisant que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ on voit facilement que l'ensemble des solutions de l'équation $\cos\theta = \frac{1}{2}$ est $\{\theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

1.2.3 La fonction tangente

D'après le b) de §1.2.2 on a

$$\cos\theta = 0 \Longleftrightarrow \cos\theta = \cos\frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

donc les zéros de la fonction $\cos$ (les valeurs angulaires en lesquelles elle s'annule) sont $\dots, -\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$, c'est-à-dire l'ensemble $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

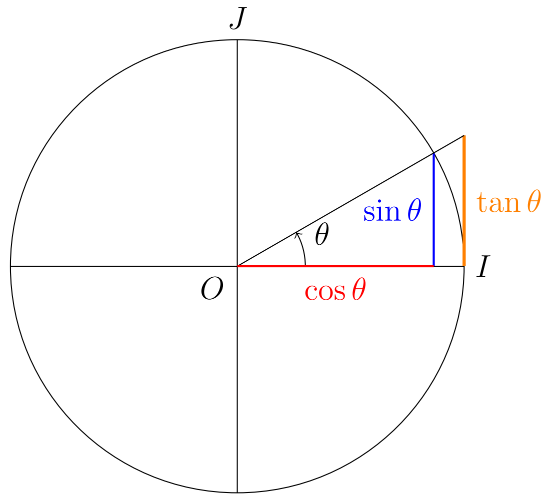
La fonction *tangente*, notée $\tan$, est définie sur $\mathbb{R}$ privé de $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, comme le rapport de la fonction $\sin$ sur la fonction $\cos$:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \ \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Interprétation géométrique. Pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, l'égalité précédente se réécrit évidemment sous la forme équivalente suivante

$$\frac{\tan\theta}{1} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$

dans laquelle le 1 du dénominateur de la première fraction doit être interprété comme le rayon du cercle trigonométrique (et donc la distance euclidienne entre O et I dans la figure qui suit). Le théorème de Thalès permet ensuite de "représenter" la quantité $\tan\theta$ sur le cercle trigonométrique :



Propriétés.

i) La fonction tangente est π-périodique.
En effet, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a

$$\tan(\theta+\pi) = \frac{\sin(\theta+\pi)}{\cos(\theta+\pi)} = \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta.$$

La représentation graphique de $\tan$ est donc invariante par translation de vecteur $\pi\vec{\imath}$. Il suffit donc d'étudier $\tan$ sur n'importe quel intervalle de longueur, comme $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

ii) La fonction tangente est impaire.
En effet, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$, on a

$$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta.$$

Le graphe de $\tan$ est donc symétrique par rapport à l'origine O (ce qui implique en particulier que $\tan 0 = 0$).

iii) La fonction tangente est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
En fait, cela se voit directement à partir de l'interprétation géométrique de la quantité $\tan\theta$ mais on peut également retrouver cette propriété à partir du calcul de la dérivée de la fonction $\tan$. En effet, pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a

$$\tan'\theta = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(\theta) = \frac{\sin'\theta\cos\theta - \sin\theta\cos'\theta}{\cos^2\theta},$$

donc en utilisant le fait que $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$, on voit que

$$\tan'\theta = \frac{\cos\theta\cos\theta - \sin\theta(-\sin\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta} > 0.$$

Remarque 5. L'expression précédente se réécrit sous la forme équivalente suivante :

$$\tan'\theta = 1 + \tan^2\theta,\ \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

iv) La fonction $\tan$ tend vers $+\infty$ lorsque θ tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures :

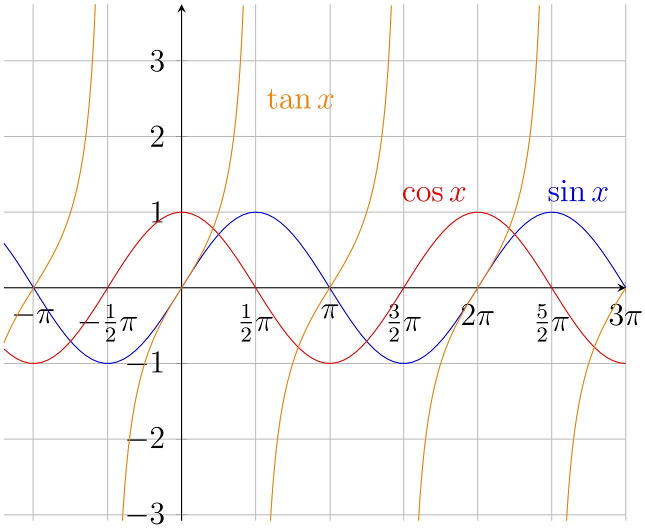
$$\lim_{\theta \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} \tan\theta = +\infty.$$

C'est facile à voir à partir de l'interprétation géométrique de $\tan\theta$, qui a été donnée plus haut.

Remarque 6. Du fait de l'imparité de la fonction $\tan$, cela entraîne que

$$\lim_{\theta \overset{>}{\to} \frac{-\pi}{2}} \tan\theta = -\infty.$$

Représentation graphique. Des propriétés précédentes, on déduit facilement l'allure générale de la représentation graphique de la fonction $\tan$ sur $[-\pi, 3\pi]$.



1.3 Les fonctions trigonométriques inverses

1.3.1 La fonction arcsin

Définition. La fonction $\sin$ étant strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$, on associe à tout $y \in [-1,1]$ un unique antécédent $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\sin$:

$$\forall y \in [-1,1],\ \exists! x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \sin x = y.$$

On pose ensuite $x = \arcsin y$, ce qui fournit l'on a l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ y = \sin x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y \in [-1,1] \\ x = \arcsin y. \end{array}\right. \tag{13}$$

La fonction

$$\arcsin : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

définie par (13), est appelée fonction *arcsinus*.

Pour tout $y \in [-1,1]$, $\arcsin y$ est donc l'unique angle de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut y.

Remarque 7. La définition précédente implique que

$$\forall y \in [-1,1],\ \sin(\arcsin y) = y. \tag{14}$$

Par contre, l'égalité

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ \arcsin(\sin x) = x \tag{15}$$

n'est vraie que si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
Ainsi, on a par exemple

$$\sin\frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

et donc, comme $-\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{4}.$$

L'équation $\sin x = y_0$**.** Étant donné $y_0 \in [-1,1]$, on déduit du a) de §1.2.2 que l'équation $\sin x = y_0$ admet une infinité de solutions, qui sont $\arcsin y_0 + 2k\pi$ et $\pi - \arcsin y_0 + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Autrement dit on a l'équivalence suivante :

$$\sin x = y_0 \in [-1,1] \iff x \in \{\arcsin y_0 + 2k\pi,\ \pi - \arcsin y_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}. \tag{16}$$

Imparité. La fonction $\arcsin$ est impaire. En effet, pour tout $y \in [-1,1]$, le réel $\arcsin y$ étant l'unique réel $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vérifiant $y = \sin x$, on a nécessairement $-x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Et comme $\sin(-x) = -\sin x = -y$, on déduit de cela que $\arcsin(-y) = -x$, soit finalement que

$$\arcsin(-y) = -\arcsin y. \tag{17}$$

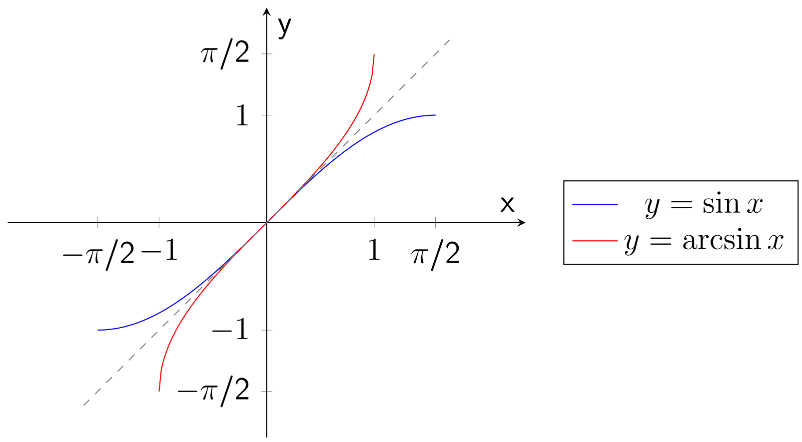
Dérivée. La fonction $\sin$ étant dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ avec $\sin' x = \cos x$ pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $\arcsin$ est donc dérivable en tout point $y = \sin x$ vérifiant $\cos x \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq \pm\frac{\pi}{2}$. Par suite $\arcsin$ est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall y \in]-1,1[,\ \arcsin' y = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}.$$

Mais $\cos^2(\arcsin y) = 1 - \sin^2(\arcsin y) = 1 - y^2$ d'après (1), donc $\cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2}$ (puisque $\arcsin y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et que la fonction $\cos$ est positive sur cet intervalle). Par conséquent,

$$\forall y \in]-1,1[,\ \arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{18}$$

Représentation graphique. Le graphe de la fonction $\arcsin$ se déduit de celui de $\sin$ par symétrie par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation $y = x$, représentée en pointillés sur la figure suivante) :



1.3.2 La fonction $\arccos$

Définition. Comme la fonction $\cos$ est strictement décroissante de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$, on associe à n'importe quel $y \in [-1, 1]$ un unique antécédent $x \in [0, \pi]$ par $\cos$:

$$\forall y \in [-1, 1], \ \exists! x \in [0, \pi], \ \cos x = y.$$

Si l'on pose $x = \arccos y$ alors on a l'équivalence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in [0, \pi] \\ y = \cos x \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y \in [-1, 1] \\ x = \arccos y. \end{array} \right. \tag{19}$$

La fonction

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi],$$

définie par (14), est appelée fonction *arc cosinus*.

Pour tout $y \in [-1, 1]$, $\arccos y$ est donc l'unique angle de $[0, \pi]$ dont le cosinus vaut y.

Remarque 8. La définition (19) implique

$$\forall y \in [-1, 1], \ \cos(\arccos y) = y. \tag{20}$$

Par contre, l'égalité

$$\forall x \in [0, \pi], \ \arccos(\cos x) = x \tag{21}$$

n'est pas vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ (elle n'est valable que sur l'intervalle $[0, \pi]$).
Ainsi, on a par exemple :

$$\cos \frac{5\pi}{3} = \cos\left(\frac{5\pi}{3} - 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3}$$

donc, comme $frac\pi 3 \in [0, \pi]$,

$$\arccos\left(\cos \frac{5\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

L'équation $\cos x = y_0$. Étant donné $y_0 \in [-1,1]$, on déduit du b) de §1.2.2 que l'équation $\cos x = y_0$ admet une infinité de solutions, qui sont $\pm \arccos y_0 + 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Autrement dit on a l'équivalence suivante :

$$\cos x = y_0 \in [-1,1] \iff x \in \{\pm \arccos y_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}\,. \tag{22}$$

Non parité. Bien que la fonction $\cos$ soit paire, la fonction $\arccos$, elle, n'est PAS paire. En effet, pour tout $y \in [-1,1]$ le réel $x = \arccos y$ appartient à $[0,\pi]$ donc $\pi - x \in [0,\pi]$. Et comme $\cos(\pi - x) = -\cos x = -y$, il vient $\pi - x = \arccos(-y)$, ce qui montre finalement que

$$\forall y \in [-1,1],\ \arccos(-y) = \pi - \arccos y. \tag{23}$$

Dérivée. La fonction $\cos$ est dérivable sur $[0,\pi]$ avec $\cos' x = -\sin x$ pour tout $x \in [0,\pi]$. Cette dérivée s'annule lorsque $x = 0$ ou π. La fonction $\arccos$ est donc dérivable en tout point $y \in [-1,1]$ différent de $\cos 0 = 1$ et $\cos \pi = -1$, et l'on obtient dans ce cas

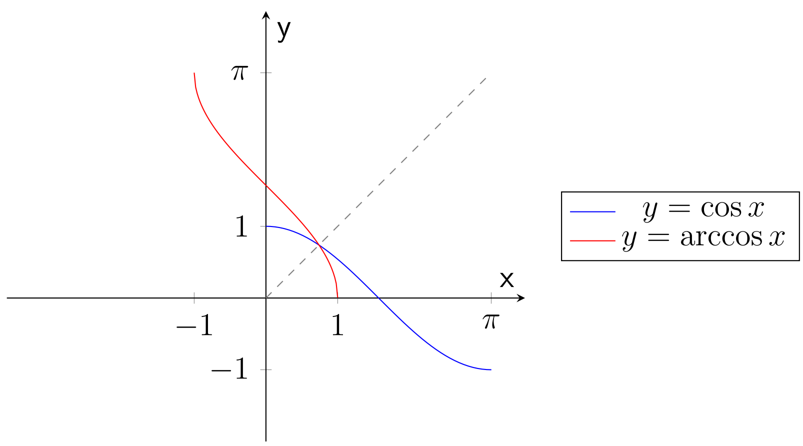
$$\forall y \in]-1,1[,\ \arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{24}$$

Remarque 9. La fonction $y \mapsto \arccos y + \arcsin y$ est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée nulle en vertu de (18) et (24). Elle est donc constante sur $[-1,1]$ et vaut $\arccos 0 + \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$:

$$\forall y \in [-1,1],\ \arcsin y + \arccos y = \frac{\pi}{2}.$$

Autrement dit, on a $\arccos = \frac{\pi}{2} - \arcsin$ sur $[-1,1]$.
Ce résultat sera redémontré, directement à partir des définitions des fonctions $\arcsin$ et $\arccos$, dans l'Exercice 7 du TD 1.

Représentation graphique. Le graphe de la fonction $\arccos$ se déduit de celui de $\cos$ par symétrie par rapport à la première bissectrice (représentée en pointillés) :



1.3.3 La fonction $\arctan$

Définition. On a vu que la fonction $\tan$ est définie en tout point de $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ et qu'elle est π-périodique. De plus, c'est une fonction impaire et strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, à valeurs dans

$$\left]\lim_{x\to-\pi/2} \tan x, \lim_{x\to\pi/2} \tan x\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

Sa réciproque est la fonction *arctangente*, notée $\arctan$:

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\arctan y$ est donc l'unique angle de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente est y.
La fonction $\arctan$ est donc définie par l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ y = \tan x \end{cases} \iff \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ x = \arctan y. \end{cases}$$

Remarque 10. Il résulte facilement de la définition ci-dessus que $\tan(\arctan y) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
Par contre, l'égalité $\arctan(\tan x) = x$ n'est vraie que si $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi, on a par exemple :

$$\tan\frac{2\pi}{3} = \tan\left(\frac{2\pi}{3} - \pi\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

et donc

$$\arctan\left(\tan\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{3},$$

puisque $-\frac{\pi}{3} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

L'équation $\tan x = y_0$**.** L'équation $\tan x = y_0$, où $y_0 \in \mathbb{R}$, possède une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, qui est $\arctan y_0$. Toutes les autres solutions se déduisent par périodicité puisque

$$\tan(\arctan y_0 + k\pi) = \tan(\arctan y_0) = y_0,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi on voit que l'équation $\tan x = y_0$ admet une infinité de solutions, qui sont $\arctan y_0 + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\tan x = y_0 \iff x \in \{\arctan y_0 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Imparité. En utilisant l'imparité de la fonction $\tan$, on voit que la fonction $\arctan$ est impaire :

$$\forall y \in \mathbb{R},\ \arctan(-y) = -\arctan y.$$

En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$\tan(-\arctan y) = -\tan(\arctan y) = -y.$$

Dérivée. La fonction $\tan$ est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ et

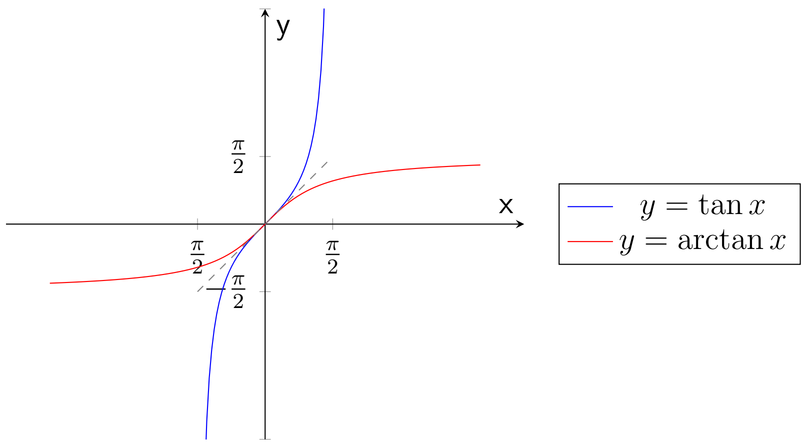
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \tan' x = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Cette dérivée ne s'annule pas, donc $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et :

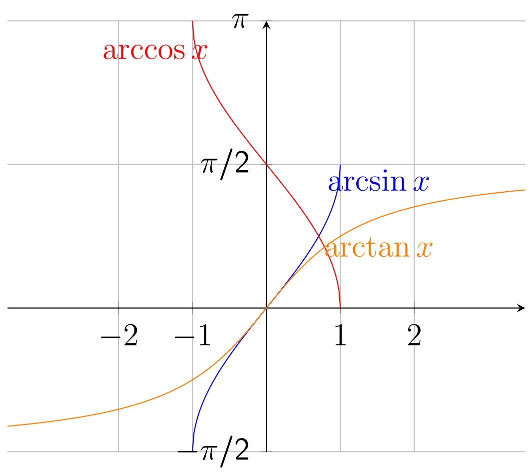
$$\forall y \in \mathbb{R},\ \arctan' y = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Remarque 11. La fonction $\arctan$ n'est PAS égale au rapport des fonctions $\arcsin$ et $\arccos$.
Déjà, $\arctan$ est définie sur $\mathbb{R}$ alors que les fonctions $\arcsin$ et $\arccos$ ne sont définies que sur $[-1,1]$. Mais, même si l'on restreint la fonction $\arctan$ à $[-1,1]$, elle ne coïncide par avec le rapport de la fonction $\arcsin$ sur $\arccos$. Du reste, comme $\arccos 1 = 0$, la fonction $x \mapsto \frac{\arcsin x}{\arccos x}$ n'est définie que sur $[-1,1[$. Mais là encore, ce rapport n'est pas égal à $\arctan x$, comme on peut le voir en prenant $x=-1$ par exemple. En effet on a dans ce cas $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ alors que $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ et $\arccos(-1) = \pi$, et donc $\frac{\arcsin(-1)}{\arccos(-1)} = -\frac{1}{2}$.

Représentation graphique. Le graphe de $\arctan$ se déduit de celui de la restriction de la fonction $\tan$ à $-\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par une symétrie par rapport à la première bissectrice (représentée en pointillés) :



Remarque 12. Tracé des fonctions $\arcsin$, $\arccos$ et $\arctan$ sur la même figure :



1.4 Calcul de l'amplitude et de la phase d'un harmonique

Étant donnés deux réels a et b non simultanément nuls (c'est-à-dire que $(a,b) \neq (0,0)$) et $\omega \in \mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$, on veut déterminer $A \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varphi \in]-\pi,\pi]$, tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t + \varphi). \tag{25}$$

On peut déjà remarquer à l'aide de la formule d'addition (3) que

$$A\cos(\omega t + \varphi) = (A\cos\varphi)\cos(\omega t) - (A\sin\varphi)\sin(\omega t),$$

et donc que si l'égalité (25) est vérifiée, alors on a nécessairement

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = (A\cos\varphi)\cos(\omega t) - (A\sin\varphi)\sin(\omega t) \tag{26}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. En particulier, en prenant $t = 0$ dans (26), cela donne

$$a = A\cos\varphi. \tag{27}$$

En combinant ensuite (26) et (27), il vient

$$\forall t \in \mathbb{R},\ b\sin(\omega t) = -(A\sin\varphi)\sin(\omega t).$$

Le choix de $t = \frac{\pi}{2\omega}$ dans cette identité (de façon que $\sin(\omega t)$ soit égal à 1) donne

$$b = -A\sin\varphi. \tag{28}$$

Maintenant, en élevant au carré chacun des deux membres dans les deux égalités (27) et (28), puis en sommant les deux identités ainsi obtenues, on trouve que

$$a^2 + b^2 = (A\cos\varphi)^2 + (-A\sin\varphi)^2 = A^2(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = A^2.$$

Et comme $A > 0$ par hypothèse, cela implique que

$$A = \sqrt{a^2+b^2}. \tag{29}$$

Autrement dit, on a montré que s'il existe $A > 0$ et $\varphi \in]-\pi,+\pi]$ vérifiant (25), alors A est uniquement déterminée par (29).

Ceci dit, il résulte de (27) et (29) que

$$\cos\varphi = \frac{a}{A} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-1,1],$$

et donc que

$$\varphi = \pm \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \in [-\pi,\pi], \tag{30}$$

en vertu de §1.2.2. Le choix du signe dans l'expression précédente est déterminé par celui de b. En effet,

a) si $b > 0$ alors on a $\sin\varphi < 0$ d'après (28), et donc

$$\varphi = -\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \in]-\pi,0[.$$

b) si $b < 0$ alors on a $\sin\varphi > 0$ en vertu de (28), et donc

$$\varphi = +\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \in]0,\pi[.$$

c) si $b = 0$ alors $A = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2} = |a| > 0$ (puisque a et b ne sont pas simultanément nuls, par hypothèse) et donc

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{|a|} \in \{\pm 1\}.$$

   i) Si $a > 0$, ce qui signifie que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1$, alors $\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arccos 1 = 0$ et l'on peut choisir indifféremment le signe $+$ ou $-$ dans (30), puisque

$$\varphi = \pm\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0.$$

   ii) Si $a < 0$, ce qui signifie que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = -1$, on a $\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arccos(-1) = \pi$ et donc $\varphi = \pm\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \pm\pi$ d'après (30). On choisit évidemment

$$\varphi = +\pi$$

   dans ce cas, afin que φ soit bien dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$.

Réciproquement, il est facile de vérifier à partir des expressions précédentes que l'égalité (25) est bien vraie.

En résumé, on a obtenu le résultat suivant.

Proposition 13. Quels que soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, il existe un unique couple $(A,\varphi) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\pi]$ pour lequel (25) est vérifiée. De plus, on a

$$A = \sqrt{a^2+b^2}$$

et

$$\begin{cases} \varphi = \operatorname{sgn}(-b)\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \text{si } b \neq 0 \\ \varphi = \operatorname{sgn}(-a)\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \text{si } b = 0. \end{cases}$$

Ici, sgn désigne la *fonction signe*, définie sur $\mathbb{R}$ comme suit :

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

On remarque que $\operatorname{sgn} x = \frac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$.

Remarque 14. Dans le cas où $b = 0$, on a simplement

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2}} = \frac{a}{|a|} = \operatorname{sgn} a$$

et donc

$$\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \arccos(\operatorname{sgn} a) = \begin{cases} \arccos 1 = 0 & \text{si } a > 0 \\ \arccos(-1) = \pi & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

En résumé, lorsque $b = 0$ on a simplement

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ \pi & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

dans l'énoncé de la Proposition 13.

Exemple 3. Pour réécrire la fonction $f(x) = \sqrt{3}\cos(2x)+\sin(2x)$ sous la forme équivalente $A\cos(2x+\varphi)$, il suffit d'appliquer la Proposition 13 avec $\omega = 2$, $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$. Cela donne $A = \sqrt{3+1} = 2$ et comme $b \neq 0$, $\varphi = -\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{6}$. On obtient ainsi que

$$f(x) = \sqrt{3}\cos(2x) + \sin(2x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

De même, pour la fonction $g(x) = -\cos(3x)$, on peut appliquer la Proposition 13 avec $\omega = 3$, $a = -1$ et $b = 0$, de sorte que $A = \sqrt{(-1)^2} = 1$ et $\varphi = \arccos(-1) = \pi$. On voit ainsi que

$$g(x) = -\cos(3x) = \cos(3x+\pi).$$

Évidemment si l'on prend $h(x) = \cos(3x)$, la fonction h est déjà écrite sous la forme cherchée, ce qui signifie que $A = 1$ et $\varphi = 0$ dans ce cas. En effet, on retrouve bien $A = \sqrt{1} = 1$ et $\varphi = -\arccos 1 = 0$ (car $\arccos 1 = 0$) en appliquant la Proposition 13 avec $\omega = 3$, $a = 1$ et $b = 0$.

2 Les nombres complexes

Il est bien connu que l'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
L'objectif de ce chapitre est de construire un nouvel ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, et nommé *ensemble des nombres complexes*, tel que :

— $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;
— l'addition et la multiplication définies sur $\mathbb{R}$ s'étendent à $\mathbb{C}$;
— toute équation du second degré possède au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

2.1 Généralités

2.1.1 Construction de $\mathbb{C}$

On rappelle que l'égalité de deux couples de réels est définie par

$$(a,b) = (a',b') \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = a' \\ b = b. \end{array} \right.$$

On va définir sur l'ensemble de ces couples de réels,

$$\mathbb{R}^2 = \{(a,b);\ a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}\},$$

une addition et une multiplication qui "prolongent" l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux opérations sera $\mathbb{C}$.

Addition et multiplication par un réel. Soient $z = (a,b)$ et $z' = (a',b')$ où a, a', b et b' sont des réels et soit λ un réel. Par définition, on pose :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z+z' & = & (a+a', b+b') \\ \lambda z & = & (\lambda a, \lambda b). \end{array} \right.$$

On voit ainsi que

$$z = (a,b) = a(1,0) + b(0,1) \tag{31}$$

Le réel a s'appelle alors *partie réelle de* z, ce que l'on note $\operatorname{Re} z = a$, et le réel b s'appelle *partie imaginaire de* z, ce que l'on note $\operatorname{Im} z = b$.
Si $b = 0$ alors $z = a(1,0)$: z est dit *réel* et l'on note plus simplement $z = a$.
Si $a = 0$ alors $z = b(0,1)$: z est dit *imaginaire pur*. En posant ensuite

$$i = (0,1),$$

on obtient que $z = bi$ ou bien encore, comme il est d'usage de le noter, que $z = ib$.
Toutes ces conventions permettent finalement de définir *l'écriture algébrique* de n'importe quel nombre complexe z,

$$z = (a,b) = a + ib \text{ avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}$$

qui est équivalente à (31).

Produit des deux nombres complexes. Soient $z = (a, b)$ et $z' = (a', b')$. Par définition on pose
$$z \times z' = zz' = (aa' - bb', ab' + a'b).$$
On vérifie alors que $(0,1)^2 = (-1,0)$, c'est-à-dire avec les notations qui viennent d'être introduites :
$$\boxed{i^2 = -1}$$
De plus, on a :
— $\underbrace{(1,0)}_{1} \times \underbrace{(a,b)}_{z} = (a,b) \times (1,0) = (a,b)$ donc $1 \times z = z \times 1 = z$, ce qui montre que $1 = (1,0)$ est élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{C}$;
— pour tout $z = (a,b) \neq (0,0)$, le complexe $z' = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ vérifie $zz' = z'z = 1$. Tout complexe non nul z possède un inverse z' noté $\frac{1}{z}$.

On dit que $\mathbb{C}$ (muni des opérations d'addition et de multiplication ainsi définies) est un *corps*. Les calculs dans $\mathbb{C}$ obéissent aux lois habituelles de l'algèbre en tenant compte de l'égalité $i^2 = -1$.

Conjugaison. Pour tout $z = (a, b)$, on appelle *conjugué de* z le nombre complexe
$$\overline{z} = a - ib = (a, -b).$$
On remarque alors immédiatement que
$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \text{ et } \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}.$$
Conséquence. On obtient directement les deux équivalences suivantes :
$$\begin{cases} (i) & z \text{ est réel} & \Longleftrightarrow & z = \overline{z} \\ (ii) & z \text{ est imaginaire pur} & \Longleftrightarrow & z = -\overline{z}. \end{cases}$$
On vérifie ensuite facilement pour tous complexes z et z', que :
$$\boxed{\begin{array}{ccc} \overline{z + z'} & = & \overline{z} + \overline{z'} \\ \overline{zz'} & = & \overline{z}\,\overline{z'} \\ \overline{\lambda\, z} & = & \lambda\, \overline{z},\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array}}$$

Résolution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$. Comme $a \neq 0$, on peut écrire
$$ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a^2}\underbrace{(b^2 - 4ac)}_{\Delta}\right) = 0.$$
Ainsi, pour chaque $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\delta^2 = \Delta$, on aura :
$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\delta^2}{4a^2} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(x - \frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(x - \frac{-b-\delta}{2a}\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = x_{\pm} = \frac{-b \pm \delta}{2a}. \end{aligned}$$

Maintenant,

— si $\Delta > 0$ alors $\delta = \pm\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$ et $x_\pm = \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ sont deux racines réelles distinctes ;
— si $\Delta = 0$ alors $\delta = 0$ et $x_+ = x_- = \frac{-b}{2a}$ est l'unique racine réelle ;
— si $\Delta < 0$ alors $\delta = \pm i\sqrt{-\Delta} \in i\mathbb{R}$ et $x_\pm = \frac{-b\pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ sont deux racines complexes conjuguées.

2.1.2 Représentation géométrique

L'analogie de l'écriture $z = a(1,0) + b(0,1)$ avec l'écriture vectorielle $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$ suggère d'associer au nombre complexe $z = (a,b)$ le point $M(a,b)$ du plan rapporté au repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. On dit alors que M est *l'image* de z, ou que z est *l'affixe* de M.

Remarque 15.
— Si $z \in \mathbb{R}$ (z est réel) alors $M \in (Ox)$. Par contre, si $z \in i\mathbb{R}$ (z est imaginaire pur), on a $M \in (Oy)$;
— Le conjugué $\overline{z}$ de z a pour image le symétrique de M par rapport à (Ox).

Image de $z + z'$. Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes d'images respectives M et M'. D'après ce que l'on vient de voir, l'image de $z'' = z+z' = a+a'+i(b+b')$ est le point M'' défini par l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$. On a donc l'équivalence

$$z'' = z + z' \iff \overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}.$$

En particulier, si $z' = -z$, il découle de l'équivalence précédente que $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$.

Conséquence. Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B. Comme

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

l'unique point C tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_C = z_B - z_A$. Ceci nous amène donc à associer le nombre complexe $z_B - z_A$ au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Application. Trouver l'expression de l'affixe z_C en fonction de z_A et z_B de sorte que $(OABC)$ soit un parallélogramme.

Image de λz, $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $z = a + ib$ on sait que $z' = \lambda z = \lambda a + i(\lambda b)$. L'image de z' est donc le point M' défini par $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$, soit :

$$z' = \lambda z \iff \overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}.$$

2.2 Module et argument d'un nombre complexe

2.2.1 Représentation trigonométrique d'un nombre complexe

Soit M l'image de $z = a + ib$. Par définition, le *module de* z est le nombre réel (positif)

$$\boxed{|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

et, lorsque $z \neq 0$, on appelle *Argument de* z (avec un "*A*" majuscule), toute mesure en radians (définie à 2π-près) de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$:

$$\boxed{\text{Arg } z = \text{mes}(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})}$$

Remarque 16.
— $|z| \geq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
— Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument.
— Lorsque $z \neq 0$, Arg z est défini à 2π-près : il existe un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que

$$\text{Arg } z = \theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Par commodité, pour tout $z \neq 0$, on appellera *argument de* z (avec un "a" minuscule) cette valeur de θ (appartenant à $[0, 2\pi[$) :

$$\arg z = \theta.$$

En résumé, pour tout complexe z non nul, on l'équivalence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\theta = \frac{a}{r} \quad \sin\theta = \frac{b}{r}, \end{array} \right.$$

ce qui fournit *l'écriture trigonométrique* de z :

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ avec } r \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.}$$

Remarque 17. Lorsque $a \neq 0$, on a $\tan\theta = \frac{b}{a}$. Cependant, cette égalité ne détermine θ qu'à π-près (puisque $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$). Pour déterminer θ, on doit choisir l'angle θ pour lequel $\cos\theta$ a bien le signe de a. En résumé :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = r\cos\theta \\ b = r\sin\theta \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan\theta = \frac{b}{a} \quad \operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn}\cos\theta. \end{array} \right.$$

2.2.2 Module et argument du produit

Soient $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ deux nombres complexes. Par un calcul simple, on obtient

$$zz' = rr'\left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')\right)$$

et comme $\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' = \cos(\theta + \theta')$ et $\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' = \sin(\theta + \theta')$, cela se réécrit

$$zz' = rr'\left(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')\right),$$

ce qui entraîne :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} |zz'| & = & |z| \times |z'| \\ \text{Arg}(zz') & = & \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z') \end{array} \right.}$$

Conséquences.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$ et $\text{Arg}(z^n) = n\text{Arg}(z)$;
— $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\text{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = -\text{Arg}(z)$.

2.3 Notation exponentielle

2.3.1 Fonction exponentielle complexe

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, on pose :

$$\boxed{\exp z = \exp a\,(\cos b + i \sin b)}$$

La fonction suivante, notée $\exp$ et définie par

$$\begin{array}{rccc} \exp \ : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \exp z, \end{array}$$

s'appelle *fonction exponentielle complexe*.

Remarque 18. Avec cette définition :
- Si $z = a \in \mathbb{R}$, on retrouve l'exponentielle réelle : $\exp z = \exp a$;
- Si $z = ib \in i\mathbb{R}$, on obtient $\exp ib = \cos b + i \sin b$;
- $|\exp z| = \exp a$ et Arg $(\exp z) = b + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. En d'autres termes, $\exp z$ est le nombre complexe de module $\exp a$ dont un argument est b.

2.3.2 Forme exponentielle d'un nombre complexe

En partant de l'écriture trigonométrique de n'importe quel nombre complexe z, $z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta)$, il résulte immédiatement de la définition de l'exponentielle complexe que

$$\boxed{z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = r\exp(i\theta) \text{ avec } r \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \theta \in \mathbb{R}.}$$

On dit alors que le nombre complexe z est mis sous *forme exponentielle*.

Formule de Moivre. On a déjà vu que si $z = \cos\theta + i\sin\theta$ et $z' = \cos\theta' + i\sin\theta'$ alors $zz' = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$. On déduit ainsi de la définition précédente l'égalité suivante :

$$\boxed{\exp(i\theta)\exp(i\theta') = \exp\left(i(\theta + \theta')\right)}$$

En choisissant $\theta' = \theta$ dans l'égalité précédente on obtient ainsi $(\exp(i\theta))^2 = \exp(i2\theta)$, donc, par récurrence immédiate sur l'entier naturel n, on obtient :

$$(\exp(i\theta))^n = \exp(in\theta). \tag{32}$$

En prenant ensuite $\theta' = -\theta$ et en remarquant que $\exp(i0) = 1$, on obtient

$$\boxed{\exp(-i\theta) = \tfrac{1}{\exp(i\theta)} = \overline{\exp(i\theta)}},$$

donc, en appliquant la formule (32) au réel $-\theta$, il vient

$$\underbrace{(\exp(-i\theta))^n}_{\frac{1}{(\exp(i\theta))^n}} = \exp(-in\theta),$$

ce qui implique :

$$(\exp(i\theta))^{-n} = \exp(-in\theta) = \exp(i(-n)\theta).$$

Par suite, nous avons démontré pour tout nombre réel θ et pour tout entier relatif n que

$$(\exp(i\theta))^n = \underbrace{\exp(in\theta)}_{\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)},$$

ce qui démontre la *formule de Moivre* :

$$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{Z},\ (\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)}$$

Application. La formule de Moivre permet d'exprimer $\cos(n\theta)$ en fonction des quantités $\cos^p\theta$ et $\sin^p\theta$ pour $0\le p\le n$, c'est-à-dire des puissances de cosinus et de sinus θ, comme on peut le voir sur cet exemple :

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \mathrm{Re}\left(\exp(i3\theta)\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\cos(3\theta)+i\sin(3\theta)\right)\\
&= \mathrm{Re}\left((\cos\theta+i\sin\theta)^3\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\cos^3\theta+3\cos^2\theta(i\sin\theta)+3\cos\theta(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3\right)\\
&= \mathrm{Re}\left(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta)\right)\\
&= \cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta.
\end{aligned}$$

Formules d'Euler. En partant de la double égalité

$$\exp(\pm i\theta)=\cos\theta\pm i\sin\theta,$$

on obtient facilement *les formules d'Euler* suivantes :

$$\boxed{\sin\theta=\tfrac{\exp(i\theta)-\exp(-i\theta)}{2i}\qquad \cos\theta=\tfrac{\exp(i\theta)+\exp(-i\theta)}{2}}$$

Application. Les formules d'Euler permettent notamment de *linéariser une expression trigonométrique*, c'est-à-dire d'exprimer $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$ en fonction de $\cos(p\theta)$ et $\sin(p\theta)$ pour $0\le p\le n$. Ainsi, on a par exemple :

$$\begin{aligned}
\sin^3\theta &= \left(\frac{\exp(i\theta)-\exp(-i\theta)}{2i}\right)^3\\
&= \frac{-1}{8i}\left(\exp(3i\theta)-3\exp(2i\theta)\exp(-i\theta)+3\exp(i\theta)\exp(-2i\theta)-\exp(-3i\theta)\right)\\
&= \frac{-1}{8i}\left(\exp(3i\theta)-3\exp(i\theta)+3\exp(-i\theta)-\exp(-3i\theta)\right)\\
&= \frac{-1}{8i}\left(\underbrace{\exp(3i\theta)-\exp(-3i\theta)}_{2i\sin(3\theta)}-3(\underbrace{\exp(i\theta)-\exp(-i\theta)}_{2i\sin\theta})\right)\\
&= -\frac{\sin(3\theta)}{4}+\frac{3\sin\theta}{4}.
\end{aligned}$$

2.3.3 Racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité

On appelle *racine* $n^{\text{ième}}$ *de l'unité* toute solution de l'équation $z^n = 1$.
Soit $z = r\exp(i\theta)$ une racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité. On a alors nécessairement :

$$\begin{aligned} z^n = 1 &\iff r^n \exp(in\theta) = 1 \exp i0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} r^n &=& 1 \\ n\theta &=& 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} r &=& 1 \\ n\theta &=& 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} r &=& 1 \\ \theta &=& \frac{2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \\ &\iff \omega_k = 1\ \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right),\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont donc $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$, $\omega_2 = \exp\left(i\frac{4\pi}{n}\right)$,. . ., $\omega_k = \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right)$,. . ., $\omega_{n-1} = \exp\left(i\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)$, $\omega_n = \underbrace{\exp\left(i\dfrac{2n\pi}{n}\right)}_{\omega_0}$, $\omega_{n+1} = \underbrace{\exp\left(i\dfrac{2(n+1)\pi}{n}\right)}_{\omega_1}$,

$\omega_{n+2} = \underbrace{\exp\left(i\dfrac{2(n+2)\pi}{n}\right)}_{\omega_2}$, etc.

On voit ainsi qu'il y n racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité distinctes, $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$. Et comme $\omega_k = \omega_1^k$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, on a démontré que

$$\boxed{\text{L'équation } z^n = 1 \text{ possède } n \text{ solutions distinctes, } \omega_1^k, \text{ pour } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}}$$

Exemple 4. L'équation $z^3 = 1$ possède 3 solutions distinctes (les racines $3^{\text{ièmes}}$ de l'unité) qui sont $\omega_0 = 1$, $\omega_1 = \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\omega_2 = \exp\left(i\frac{4\pi}{3}\right) = -\exp\left(i\frac{\pi}{3}\right)$.

Remarque 19. Pour tout $n \geq 2$, on a l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0.$$

En effet, comme ω_1 est racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité, on a

$$\begin{aligned} \omega_1^n - 1 = 0 &\iff \underbrace{(\omega_1 - 1)}_{\neq 0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^k \right) = 0 \\ &\iff \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\omega_1^k}_{\omega_k} = 0 \\ &\iff \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0. \end{aligned}$$

2.3.4 Un exemple d'utilisation des nombres complexes

On considère un signal sinusoïdal de *pulsation* ω :

$$s(t) = V \cos(\omega t + \varphi).$$

Ici, V est *l'amplitude* du signal s et φ sa *phase*. Toutes les quantités introduites (ω, V et φ) sont réelles. On peut alors écrire

$$s(t) = \mathrm{Re}\left(V \exp\left(i(\omega t + \varphi)\right)\right) = \mathrm{Re}\left(V \exp\left(i\varphi\right) \exp\left(i\omega t\right)\right).$$

L'expression $\mathcal{V} = V \exp\left(i\varphi\right)$ s'appelle *l'amplitude complexe* du signal s.
Maintenant, si l'on considère deux signaux

$$\left\{ \begin{array}{lllll} s_1(t) & = & V_1 \cos(\omega t + \varphi_1) & = & \mathrm{Re}\left(V_1 \exp(i\varphi_1) \exp(i\omega t)\right) \\ s_2(t) & = & V_2 \cos(\omega t + \varphi_2) & = & \mathrm{Re}\left(V_2 \exp(i\varphi_2) \exp(i\omega t)\right), \end{array} \right.$$

de même pulsation ω, leur somme s est :

$$s(t) = \mathrm{Re}\left((V_1 \exp i\varphi_1 + V_2 \exp i\varphi_2) \exp i\omega t\right).$$

Il s'agit donc à nouveau d'un signal sinusoïdal de pulsation ω, dont l'amplitude complexe est la somme des deux amplitudes complexes de chacun des signaux s_1 et s_2.
Dans le cas particulier où $V_1 = V_2 = V$, on a de plus :

$$\begin{aligned} & V_1 \exp(i\varphi_1) + V_2 \exp(i\varphi_2) \\ = \; & V \exp\left(i\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \left(\underbrace{\exp\left(i\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) + \exp\left(i\frac{-\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)}_{2\cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)} \right) \\ = \; & 2V \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \exp\left(i\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right), \end{aligned}$$

ce qui permet d'établir avec très peu de calculs que :
- l'amplitude de s est $2V \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)$
- la phase de s est $\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$.