Aix-Marseille Université
Institut Universitaire de Technologie
Département Réseaux et Télécommunications

INTÉGRATION ET ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Contents

1 Intégration **5**
1.1 Intégrale définie . . . 5
1.1.1 Fonction intégrable . . . 5
1.1.2 Propriétés de l'intégrale . . . 6
1.1.3 Primitive . . . 9
1.2 Calcul d'intégrales finies . . . 11
1.2.1 Calcul à l'aide de primitives . . . 11
1.2.2 Méthodes générales . . . 11
1.2.3 Une méthode naturelle : la linéarisation . . . 12
1.2.4 Intégration des fractions rationnelles . . . 13
1.2.5 Intégration de fractions rationnelles des fonctions circulaires . . . 13
1.3 Extension de la notion d'intégrale . . . 14
1.3.1 Intégration d'une fonction non bornée . . . 14
1.3.2 Intégration sur $[a, +\infty[$ . . . 16

2 Équations différentielles **19**
2.1 Généralités . . . 19
2.1.1 Notion d'équation différentielle . . . 19
2.1.2 Solution d'une équation différentielle . . . 19
2.2 Équations différentielles du premier ordre . . . 20
2.2.1 Équations différentielles linéaires . . . 20
2.2.2 Équations à variables séparables . . . 24
2.3 Équations différentielles du second ordre . . . 25
2.3.1 Équation différentielle du second ordre se ramenant au premier ordre . . . 25
2.3.2 Équation différentielle linéaire du second ordre . . . 26

Chapter 1

Intégration

1.1 Intégrale définie

1.1.1 Fonction intégrable

Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie et <u>bornée</u> sur $[a, b]$.

Sommes de Darboux

Considérons une subdvision $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ telle que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Le diamètre de σ est, par définition, la longueur maximale entre deux points x_i consécutifs :

$$\delta(\sigma) = \max_{i\in\{0,1,\ldots,n-1\}} (x_{i+1} - x_i).$$

Dans la suite, la subdivision σ considérée sera toujours choisie de telle façon que $\delta(\sigma) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Remarquons maintenant que la fonction f, qui est supposée bornée sur $[a, b]$, possède une borne inférieure m_i et une borne supérieure M_i sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$:

$$m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x), \quad M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x).$$

On peut ainsi définir les "sommes de Darboux" $s(f, \sigma)$ et $S(f, \sigma)$ associées à f et σ :

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)m_i}_{s(f,\sigma)} \leq \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)M_i}_{S(f,\sigma)}.$$

Critère d'intégrabilité

La fonction f est dite intégrable sur $[a, b]$ si $\lim\limits_{\delta(\sigma)\to 0} s(f, \sigma) = \lim\limits_{\delta(\sigma)\to 0} S(f, \sigma) = I_f$.

La limite commune I_f, quand elle existe, de $s(f, \sigma)$ et $S(f, \sigma)$ lorsque $\delta(\sigma)$ tend vers 0, s'appelle "intégrale de

f sur $[a, b]$" ou "somme de f sur $[a, b]$". On la note :

$$I_f = \int_a^b f(x)dx.$$

Le réels a et b s'appellent respectivement "borne inférieure" et "borne supérieure"de l'intégrale.
Ayant fait le choix de subdivisions σ telles que $\delta(\sigma) \to 0$ lorsque $n \to \infty$, on peut donc écrire :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)m_i \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)M_i \right),$$

et, pour toute subdivision σ de $[a, b]$, on vérifie que

$$s(f, \sigma) \leq \int_a^b f(t)dt \leq S(f, \sigma).$$

Permutation des bornes inférieure et supérieure

Jusqu'ici, on n'a défini que les intégrales dont la borne inférieure a est plus petite que la borne supérieure b.
Pour s'affranchir de cette limitation, on pose simplement :

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$$

Classe de fonctions intégrables

Il n'est pas facile de caractériser complètement l'ensemble de toutes les fonctions intégrables sur $[a, b]$. Néanmoins, on peut démontrer le résultat suivant :

Théorème 1

- *Une fonction monotone sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$,*
- *Une fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.*

1.1.2 Propriétés de l'intégrale

Interprétation géométrique

Il découle directement de la définition de l'intégrale de f sur $[a, b]$ que $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique [1] de la portion de plan située entre la courbe $y = f(x)$ et les droites d'équations respectives $y = 0$, $x = a$ et $x = b$.
La propriété d'additivité des aires permet alors d'écrire la "relation de Chasles" :

$$\boxed{\forall c \in [a, b],\ \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

[1] Par "aire algébrique" il faut comprendre que l'intégrale de f sur $[a, b]$ peut être négative si l'aire géométrique (toujours comptée positivement) de la portion de plan située en dessous de $y = 0$ est supérieure à celle de la portion de plan située au dessus de $y = 0$.

Conséquence : intégration d'une fonction discontinue. Supposons que f soit continue en tout point de $[a,b]$ sauf en le point $c \in]a,b[$ en lequel elle possède une limite à gauche et une limite à droite finies.
On peut donc prolonger la restriction de la fonction f à l'intervalle $[a,c]$, $f_{|[a,c]}$, en une fonction continue sur $[a,c]$ en posant $f_{|[a,c]}(c) = \lim\limits_{x\to c^-} f(x)$. La fonction ainsi prolongée est continue, donc intégrable sur $[a,c]$.
De même, la restriction de la fonction f à l'intervalle $[c,b]$, $f_{|[c,b]}$, se prolonge en une fonction continue sur $[c,b]$ en posant $f_{|[c,b]}(c) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x)$. La fonction ainsi prolongée est continue, donc intégrable sur $[c,b]$.
On définit alors l'intégrale de f sur $[a,b]$ en posant :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f_{|[a,c]}(x)dx + \int_c^b f_{|[c,b]}(x)dx.$$

Avec cette définition, on voit notamment que la valeur de $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ ne dépend pas de la valeur de $f(c)$ mais de $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)$ seulement.

Linéarité de l'intégrale

En revenant à la définition de l'intégrale, on montre facilement que

$$\boxed{\begin{array}{c}\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \displaystyle\int_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx,\ \lambda\in\mathbb{R}\end{array}}$$

pour toutes fonctions intégrables f et g.

Signe de l'intégrale

Supposons que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$. On a donc $m_i = \inf\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) \geq 0$ pour toute subdivision $\sigma = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_n = b\}$ de $[a,b]$. Par suite, $s(f,\sigma) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \underbrace{(x_{i+1}-x_i)}_{>0}\underbrace{m_i}_{\geq 0} \geq 0$, donc, comme $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq s(f,\sigma)$, on en déduit :

$$\boxed{(\forall x\in[a,b],\ f(x)\geq 0) \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0}$$

Conséquences.

Comparaison : $\boxed{(\forall x\in[a,b],\ f(x)\leq g(x)) \Longrightarrow \left(\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx\right)}$

Pour le voir, il suffit d'appliquer l'implication précédente à la fonction $x \mapsto g(x) - f(x)$ puis d'utiliser la linéarité de l'intégrale.

Valeur absolue: $\boxed{\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx}$

En effet, pour tout $x \in [a,b]$, on a $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, donc, en intégrant cette double inégalité entre a et b, il vient, compte tenu du résultat précédent,

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx,$$

ce qui démontre bien le résultat.

Attention : même si la fonction f n'est pas identiquement nulle sur $[a,b]$, l'hypothèse "$f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$" n'assure pas, en général, que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$. En effet, la fonction positive sur $[-1,1]$ suivante

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1,1]\backslash\{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

n'est pas identiquement nulle sur $[-1,1]$ bien que $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = 0$. Dans ce contre-exemple, on remarque que la fonction considérée n'est pas continue en $x = 0$.
Par contre, avec une hypothèse de continuité, on assure l'implication suivante :

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ n'est pas identiquement nulle sur } [a,b] \\ \forall x \in [a,b],\ f(x) \geq 0 \\ f \text{ est continue sur [a,b]} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\int_a^b f(x)dx > 0\right).$$

En effet, si f est positive et n'est pas identiquement nulle sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$. Choisissons maintenant $\varepsilon = \frac{f(c)}{2} > 0$. La fonction f est continue en $x = c$, donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in [a,b] \cap [c-\alpha, c+\alpha],\ |f(x) - f(c)| < \varepsilon.$$

Quitte à remplacer $c - \alpha$ par a ou $c + \alpha$ par b, supposons que $a \leq c - \alpha$ et $c + \alpha \leq b$. On a ainsi, pour tout $x \in [c-\alpha, c+\alpha] \subset [a,b]$,

$$f(x) = f(c) + (f(x) - f(c)) \geq f(c) - \underbrace{|f(x) - f(c)|}_{<\frac{f(c)}{2}} > \frac{f(c)}{2} > 0.$$

Ainsi,

$$\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(x)dx \geq \underbrace{\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} \frac{f(c)}{2}dx}_{\alpha f(c)} > 0.$$

Par ailleurs, comme

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\int_a^{c-\alpha} f(x)dx}_{\geq 0} + \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(x)dx + \underbrace{\int_{c+\alpha}^b f(x)dx}_{\geq 0},$$

on voit bien que

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(x)dx > 0.$$

Formule de la moyenne

THÉORÈME 2 – *Si f est continue sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c).$$

Le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est appelé valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Démonstration. Comme f est continue sur $[a,b]$, la fonction f possède, en vertu du théorème 6 du chapitre "Limites et continuité", une borne inférieure m ainsi qu'une borne supérieure M sur $[a,b]$:

$$\forall x \in [a,b],\ m \leq f(x) \leq M.$$

En intégrant cette double inégalité entre a et b, il vient alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

soit, en divisant par $\dfrac{1}{b-a} > 0$:

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M.$$

Or, f étant continue sur $[a,b]$, le théorème précédemment cité garantit que tout point $\mu \in [m,M]$ est l'image d'au moins un $x \in [a,b]$. Par suite, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \blacksquare$$

1.1.3 Primitive

Définition

La fonction f étant toujours supposée intégrable sur $[a,b]$, on appelle "primitive de f sur $[a,b]$" toute fonction F dérivable vérifiant

$$\forall x \in [a,b],\ F'(x) = f(x).$$

Si f possède une primitive F_0 sur $[a,b]$, alors, pour tout réel C, il est clair que la fonction $F(x) = F_0(x) + C$ est également une primitive de f sur $[a,b]$. Réciproquement, toute primitive F de f sur $[a,b]$ satisfaisant $(F-F_0)'(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$, la fonction $x \mapsto (F-F_0)(x)$ est constante sur $[a,b]$, donc

$$\forall x \in [a,b],\ F(x) = F_0(x) + (\underbrace{F(a) - F_0(a)}_{C}).$$

Ceci montre que toutes les primitives de f sur $[a,b]$ se déduisent de F_0 par l'addition d'une constante.

Intégrale fonction de sa borne supérieure

Soit $x \in [a,b]$. La fonction f, intégrable sur $[a,b]$, est a fortiori intégrable sur l'intervalle $[a,x]$. Cela permet de définir la fonction

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt. \end{array}$$

THÉORÈME 3 – *La fonction φ est continue sur $[a,b]$.*
Lorsque f est de plus continue sur $[a,b]$, φ est dérivable sur $[a,b]$, et :

$$\forall x \in [a,b],\ \varphi'(x) = f(x).$$

Démonstration. Soit $x_0 \in [a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$, la relation de Chasles montre que

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

La fonction f étant supposée bornée sur $[a,b]$, posons $M_1 = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|$. On a donc

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t)|dt \right| \leq M_1 |x - x_0| \overset{x\to x_0}{\to} 0.$$

Par suite, on a montré que $\varphi(x) \overset{x\to x_0}{\to} \varphi(x_0)$ et donc que $x \mapsto \varphi(x)$ est continue en x_0.
Si f est de plus continue sur $[a,b]$, et donc sur $[x_0,x]$, la formule de la moyenne s'applique sur l'intervalle $[x_0,x]$: il existe $c_x \in [x_0,x]$ tel que

$$\frac{1}{x-x_0} \underbrace{\int_{x_0}^x f(t)dt}_{\varphi(x)-\varphi(x_0)} = f(c_x).$$

Faisons tendre maintenant x vers x_0. Comme c_x appartient à $[x_0,x]$, on voit que $c_x \to x_0$ et que $f(c_x) \to f(x_0)$ car f est continue en x_0. L'égalité précédente implique donc :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} f(c_x) = f(x_0),$$

ce qui montre que φ est dérivable en x_0 de nombre dérivé $f(x_0)$. ∎

Cas d'une fonction continue

Le théorème 3 assure en fait que toute fonction continue possède des primitives, à savoir $F_C : x \mapsto \varphi(x) + C$ pour tout $C \in \mathbb{R}$.
Ainsi, F étant une primitive de f sur $[a,b]$, il existe un réel C tel que :

$$\forall x \in [a,b],\ F(x) = \underbrace{\int_a^x f(t)dt}_{\varphi(x)} + C.$$

Comme $\varphi(a) = 0$, on a en fait $C = F(a)$. En prenant ensuite $x = b$, il vient finalement

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

ce qui montre que le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ se ramène ici à celui d'une primitive F de la fonction f.

1.2 Calcul d'intégrales finies

1.2.1 Calcul à l'aide de primitives

L'existence de primitives $x \mapsto F(x) + C$ sur $[a, b]$ de la fonction f permet de ramener le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ à celui de $F(b) - F(a)$. Il est donc utile de dresser la liste des primitives (quand elles existent) des principales fonctions usuelles.

$$\begin{array}{|lcl lcl|}
\hline
\displaystyle\int x^\alpha dx & = & \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},\ \alpha \neq -1 & \displaystyle\int \frac{dx}{x} & = & \ln|x| + C \\
\displaystyle\int \sin x dx & = & -\cos x + C & \displaystyle\int \cos x dx & = & \sin x + C \\
\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} & = & -\dfrac{1}{\tan x} + C & \displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} & = & \tan x + C \\
\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & = & \arcsin x + C & \displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} & = & \arctan x + C \\
\displaystyle\int a^x dx & = & \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\} & \displaystyle\int \ln x dx & = & x \ln x - x + C \\
\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} & = & -\ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + C & \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} & = & \ln\left(\sqrt{x^2-1} + x\right) + C \\
\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} & = & \dfrac{1}{2}\ln\left(\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|\right) + C & \displaystyle\int \mathrm{chx\ dx} & = & \mathrm{shx + C} \\
\hline
\end{array}$$

1.2.2 Méthodes générales

Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$.
Le produit $uv : x \mapsto u(x)v(x)$ est donc dérivable sur $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$, on a :

$$(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Comme toutes les fonctions de cette égalité sont continues sur $[a,b]$, on peut l'intégrer entre a et b :

$$\underbrace{\int_a^b (uv)'(x)dx}_{u(b)v(b)-u(a)v(a)} = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx,$$

ce qui s'écrit également :

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx}$$

Cette formule, très utile, est connue sous le nom de "formule d'intégration par parties".

Changement de variables

Soient f une fonction intégrable sur $[a,b]$ et φ une fonction de classe C^1 de $[\alpha,\beta]$ sur $[a,b]$ (ce qui signifie que φ est une surjection de $[\alpha,\beta]$ sur $[a,b]$, c'est-à-dire que tout réel $x \in [a,b]$ possède -au moins- un antécédent $t \in [\alpha,\beta]$ vérifiant $x = \varphi(t)$) telle que

$$\begin{cases} a = \varphi(\alpha), \\ b = \varphi(\beta). \end{cases}$$

Dans le calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ on considère que la variable d'intégration x est une fonction de la nouvelle variable t en "posant" $x = \varphi(t)$, ce qui est cohérent car, vu les hypothèses faites sur la fonction φ, x décrit bien l'intervalle d'intégration $[a,b]$ lorsque t décrit $[\alpha,\beta]$. On a donc formellement :

$$dx = \frac{dx}{dt}dt = \varphi'(t)dt,$$

ce qui implique la "formule de changement de variable" :

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}$$

1.2.3 Une méthode naturelle : la linéarisation

L'intégrale étant linéaire, on peut parfois ramener le calcul d'une intégrale donnée à celui de la somme d'intégrales plus simples à exprimer.

Exemples.

Intégration des polynômes. Si $P(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ pour $a_0, a_1, \ldots, a_n$ appartenant à $\mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b P(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) dx = \sum_{i=0}^{n} a_i \underbrace{\int_a^b x^i dx}_{\frac{1}{i+1}[x^{i+1}]_a^b} .$$

Intégration de $\sin^2 x$. On utilise la formule de linéarisation $\sin^2 x = \frac{\cos(2x)-1}{2}$, de sorte que

$$\int_a^b \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\left\{\underbrace{\int_a^b \cos(2x)dx}_{\frac{1}{2}[\sin(2x)]_a^b} - \underbrace{\int_a^b dx}_{[x]_a^b}\right\}.$$

1.2.4 Intégration des fractions rationnelles

Une fois la fraction rationnelle $R(x)$ décomposée en éléments simples, le calcul de $\displaystyle\int_a^b R(x)dx$ se ramène à celui de primitives du type

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m} \qquad \text{et} \qquad \int \frac{x+a}{[(x-\alpha)^2+\omega^2]^m}dx,\ \omega > 0.$$

Pour les pôles de première espèce, le problème est réglé car :

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-m}\dfrac{1}{(x-\alpha)^{m-1}} + C & \text{si } m \neq 1 \\[2ex] \ln|x-\alpha| + C & \text{si } m = 1, \end{cases}$$

Pour les pôles de seconde espèce, il est commode de faire le changement de variable $x - \alpha = \omega t$, de sorte que

$$\int \frac{x+a}{[(x-\alpha)^2+\omega^2]^m}dx = \frac{1}{\omega^{2m-1}}\int \frac{tdt}{(t^2+1)^m} + \frac{\alpha - a}{\omega^{2m}}\int \frac{dt}{(t^2+1)^m}.$$

Pour la première intégrale de cette somme, on a :

$$\int \underbrace{\frac{tdt}{(t^2+1)^m}}_{\frac{1}{2}\frac{d(1+t^2)}{(t^2+1)^m}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{(1+t^2)^{-m+1}}{-m+1} + C & \text{si } m \neq 1 \\[2ex] \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) + C & \text{si } m = 1, \end{cases}$$

et pour la seconde, il convient d'effectuer le changement de variable $t = \tan\varphi$ (car cela entraîne $dt = (1 + \tan^2\varphi)d\varphi$):

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^m} = \int \frac{d\varphi}{(1+\tan^2\varphi)^{m-1}} = \int \cos^{2(m-1)}\varphi d\varphi,$$

ce dernier calcul s'effectuant en linéarisant la quantité $\cos^{2(m-1)}\varphi$, comme cela a été vu au §1.2.3.

1.2.5 Intégration de fractions rationnelles des fonctions circulaires

Il s'agit ici d'intégrer les fonctions du type $R(\sin x, \cos x)$ où R est une "fraction rationnelle de deux variables". La méthode consiste à effectuer le changement de variable

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right),\ x \in]-\pi, +\pi[.$$

En effet, on a alors
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$
et d'autre part
$$x = 2\arctan t, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$
ce qui donne
$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \underbrace{R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}}_{\text{fraction rationnelle en } t} dt.$$
Cependant cette méthode a l'inconvénient de conduire parfois à des calculs très lourds. Dans certains cas particuliers, on peut utiliser un changement de variable plus adapté :

- $\displaystyle\int R(\cos x)\sin x dx = -\int R(\cos x)d(\cos x)$, on pose $t = \cos x$,
- $\displaystyle\int R(\sin x)\cos x dx = \int R(\sin x)d(\sin x)$, on pose $t = \sin x$,
- $\displaystyle\int R(\tan x)dx$, on pose $t = \tan x$.

1.3 Extension de la notion d'intégrale

On a envisagé jusqu'ici le cas de fonctions bornées, intégrables sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Nous allons maintenant essayer d'étendre la notion d'intégrale au cas où :

- f n'est plus bornée sur $[a, b]$,
- l'intervalle d'intégration n'est pas borné.

1.3.1 Intégration d'une fonction non bornée

Définition et exemple fondamental

Définition. On considère une fonction f continue sur $[a, b[$ et telle que $\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$. Pour tout $x \in [a, b[$, $t \mapsto f(t)$ est continue donc intégrable sur $[a, x]$, ce qui permet de définir
$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt.$$
Si cette fonction possède une limite lorsque x tend vers b par valeurs inférieures, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente, et on pose
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)dt.$$
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est divergente.

Exemple fondamental. Etudions le cas particulier où $f(t) = \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in [a, b[$,

$$\int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha-1}\left[\dfrac{1}{(b-t)^{\alpha-1}}\right]_a^x = \dfrac{1}{\alpha-1}\left(\dfrac{1}{(b-x)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{(b-a)^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ [-\ln|b-t|]_a^x = -\ln(b-x) + \ln(b-a) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

- <u>Cas où $\alpha \neq 1$.</u>
  Comme $\lim_{x\to b^-} \dfrac{1}{(b-x)^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 1, \end{cases}$ l'intégrale est convergente lorsque $\alpha < 1$ et divergente lorsque $\alpha > 1$. De plus, si $\alpha < 1$, on a
  $$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$
- <u>Cas où $\alpha = 1$.</u>
  Comme $\lim_{x\to b-} \ln(b-x) = -\infty$, l'intégrale est divergente.

On retiendra donc :

$$\boxed{\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt \text{ est convergente} \iff \alpha < 1}$$

Cas des fonctions positives

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b[$, telle que $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$.

Règle de comparaison. D'après le théorème 3, la fonction $\varphi : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est positive et croissante sur $[a, b[$ (car elle y est dérivable, de dérivée $\varphi'(x) = f(x) \geq 0$). Il est donc intuitivement clair que φ possède une limite finie lorsque x tend vers b par valeurs inférieures si et seulement si elle est majorée sur $[a, b[$:

$$\left(\int_a^b f(t)dt \text{ est convergente}\right) \iff \left(x \mapsto \int_a^x f(t)dt \text{ est majorée sur } [a, b[\right)$$

Conséquences. Soit g une fonction majorant f sur $[a, b[$. Alors, si g est intégrable sur tout sous-intervalle $[a, x]$ pour $x \in [a, b[$, on a bien sûr :

$$\forall x \in [a, b[,\ 0 \leq \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt.$$

Ainsi :

- si $\int_a^b g(t)dt$ est convergente alors $\int_a^b f(t)dt$ est convergente et $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$,
- si $\int_a^b f(t)dt$ est divergente alors $\int_a^b g(t)dt$ est divergente.

Règle de l'équivalent. La fonction g étant supposée intégrable sur tout sous-intervalle $[a,x]$ pour $x \in [a,b[$, on déduit de ce qui précède la règle suivante :

$$\boxed{\left(f \overset{b}{\sim} g\right) \Longleftrightarrow \left(\int_a^b f(t)dt \text{ et } \int_a^b g(t)dt \text{ sont de même nature}\right)}$$

Application : si $f \overset{b}{\sim} \frac{1}{(b-t)^\alpha}$ alors

- $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si $\alpha < 1$,
- $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est divergente si $\alpha \geq 1$.

Cas des fonctions de signe quelconque

On se ramène en fait au cas des fonctions positives au moyen du théorème (admis) suivant :

Théorème 4 – *Si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente.*

Une fonction f dont l'intégrale de la valeur absolue, $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$, est convergente est dite "absolument convergente". On résume donc le théorème 4 par l'implication :

$$\text{absolument convergente} \implies \text{convergente.}$$

La réciproque est (bien sûr) fausse.

1.3.2 Intégration sur $[a,+\infty[$

Définition et exemple fondamental

Définition. On considère ici une fonction f continue sur $[a,+\infty[$. Pour tout $x \in [a,b[$, $t \mapsto f(t)$ est à nouveau continue donc intégrable sur $[a,x]$, ce qui permet encore de définir

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt.$$

Si cette fonction possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, et on pose

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

Exemple fondamental. Prenons $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$, le réel a appartenant à $\mathbb{R}_+^*$ (afin d'éliminer les éventuels problèmes d'intégration en $t = 0$).
Pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$\int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left[\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_a^x = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{a^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ [\ln|t|]_a^x = \ln x - \ln a & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

- <u>Cas où $\alpha \neq 1$.</u>
  Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1, \end{cases}$ l'intégrale est divergente lorsque $\alpha < 1$ et convergente lorsque $\alpha > 1$. De plus, si $\alpha > 1$, on a
  $$\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$
- <u>Cas où $\alpha = 1$.</u>
  Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$, l'intégrale est divergente.

On retiendra donc :

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ est convergente} \Longleftrightarrow \alpha > 1}$$

Cas des fonctions positives

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, +\infty[$.

Règle de comparaison. D'après le théorème 3, la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est positive et croissante sur $[a, +\infty[$ (car elle est dérivable sur $[a, +\infty[$, de dérivée $f(x) \geq 0$). Il est donc intuitivement clair que φ possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si elle est majorée sur $[a, +\infty[$:

$$\left(\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ est convergente}\right) \Longleftrightarrow \left(x \mapsto \int_a^x f(t)dt \text{ est majorée sur } [a, +\infty[\right)$$

Conséquences. Soit g une fonction majorant f sur $[a, +\infty[$. Alors, si g est intégrable sur tout sous-intervalle $[a, x]$ pour $x \in [a, +\infty[$, on a bien sûr :

$$\forall x \in [a, +\infty[,\ 0 \leq \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt.$$

Ainsi :

- si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ est convergente alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)dt$,
- si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ est divergente.

Règle de l'équivalent. La fonction g étant supposée intégrable sur tout sous-intervalle $[a, x]$ pour $x \in [a, +\infty[$, on déduit de ce qui précède la règle suivante :

$$\boxed{\left(f \overset{+\infty}{\sim} g\right) \Longleftrightarrow \left(\int_a^{+\infty} f(t)dt \text{ et } \int_a^{+\infty} g(t)dt \text{ sont de même nature}\right)}$$

Application : si $f \overset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$ alors

- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente si $\alpha > 1$,
- $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente si $\alpha \leq 1$.

Cas des fonctions de signe quelconque

On se ramène encore au cas des fonctions positives au moyen du théorème (admis) suivant :

THÉORÈME 5 – *Si* $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ *est convergente alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *est convergente.*

Une fonction f dont l'intégrale de la valeur absolue, $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$, est convergente est dite "absolument convergente" sur $[a, +\infty[$.

Chapter 2

Équations différentielles

2.1 Généralités

2.1.1 Notion d'équation différentielle

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $F : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$.
On appelle *équation différentielle d'ordre n* toute relation de la forme

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{2.1}$$

entre la variable x et la fonction $x \mapsto y(x)$ ainsi que ses dérivées $y^{(p)}$, $1 \leq p \leq n$.

Exemple. Si l'on considère l'équation différentielle

$$\ln x \times y' + \frac{1}{x} y = 0, \tag{2.2}$$

on est en présence d'une équation d'ordre 1, puisqu'elle se met sous la forme équivalente $F(x, y, y') = 0$, où :

$$F \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & \ln x_1 \times x_3 + \frac{x_2}{x_1}. \end{array} \right.$$

2.1.2 Solution d'une équation différentielle

On appelle *solution de l'équation différentielle (2.1)* toute fonction $x \mapsto \varphi(x)$ définie sur un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$, telle que :

$$\begin{array}{ll} (i) & \varphi \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I \\ (ii) & \forall x \in I,\ (x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \in \Omega \\ (ii) & \forall x \in I,\ F\left[x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right] = 0. \end{array}$$

Exemple. Reprenons l'équation (2.2) et remarquons qu'elle s'écrit simplement

$$\ln x y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = (\ln x \times y(x))' = 0.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}(y \text{ est solution de } (2.2)) &\iff (\ln x \times y(x) = C,\ C \in \mathbb{R}) \\ &\iff \left(y(x) = \frac{C}{\ln x},\ C \in \mathbb{R}\right)\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (2.2) est donc formé des fonctions

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{C_1}{\ln x} & \text{si } x \in]0,1[\\ \frac{C_2}{\ln x} & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{cases}$$

définie sur $\mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, ainsi que de la restriction de la fonction nulle à $\mathbb{R}_+^*$ (cas où $C = 0$).
Soient maintenant $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- si $x_0 \neq 1$, il existe une seule solution y de (2.2) telle que $y(x_0) = y_0$. C'est la fonction

$$x \mapsto \frac{y_0 \ln x_0}{\ln x} \quad (C = y_0 \ln x_0);$$

- si $x_0 = 1$, il y a deux possibilités :
  - si $y_0 \neq 0$, il n'existe pas de solution y de (2.2) telle que $y(x_0) = y_0$;
  - si $y_0 = 0$, la seule solution y de (2.2) vérifiant $y(x_0) = y_0$ est la fonction identiquement nulle.

2.2 Équations différentielles du premier ordre

Ce sont des équations différentielles du type

$$F(x, y, y') = 0, \tag{2.3}$$

liant la variable x à y et à sa dérivée première, où $F : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
Parfois, (2.3) peut se mettre sous la forme $y' = f(x, y)$ avec $f : \omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dans ce cas particulier, l'équation différentielle est dite *résolue en* y'.

2.2.1 Équations différentielles linéaires

Définition

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation différentielle de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x), \tag{2.4}$$

dans laquelle a, b et c sont des fonctions continues sur un sous-ensemble commun I de $\mathbb{R}$.
L'équation différentielle

$$a(x)y' + b(x)y = 0 \tag{2.5}$$

est appelée *équation sans second membre (essm) associée à (2.4).*

Structure de l'ensemble des solutions de (2.4)

Soit S' l'ensemble des solutions de (2.5) :

$$S' = \{y : J \subset I \to \mathbb{R}, \text{dérivable et t.q. } a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0 \ \forall x \in J\}.$$

Notons ensuite $\tilde{y}$ une solution particulière de (2.4).

Théorème 2.2.1 *L'ensemble des solutions S de (2.4) est :*

$$S = \{\tilde{y} + y, \ y \in S'\}$$

Preuve
Comme $\tilde{y}$ est solution de (2.4), il existe un sous-ensemble $\tilde{J}$ de I tel que

$$\forall x \in \tilde{J}, \ a(x)\tilde{y}'(x) + b(x)\tilde{y}(x) = c(x). \tag{2.6}$$

Commençons par montrer que $\{\tilde{y} + y, \ y \in S'\} \subset S$, c'est-à-dire que pour chaque solution y de (2.5), $y + \tilde{y}$ est solution de (2.4). Si y est solution de (2.5), on peut trouver un sous-ensemble J de I tel que

$$\forall x \in J, \ a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0. \tag{2.7}$$

Par suite, $\tilde{y}$ et y sont notamment définies sur le sous-ensemble $J_1 = \tilde{J} \cap J$ de I, et, en faisant la somme de (2.6) et (2.7), on obtient pour chaque $x \in J_1$:

$$a(x)[\tilde{y} + y]'(x) + b(x)[\tilde{y} + y](x) = c(x),$$

ce qui montre que $\tilde{y} + y \in S$.
Reste donc à prouver l'inclusion inverse, $S \subset \{\tilde{y} + y, \ y \in S'\}$, ce qui revient à montrer pour chaque solution y_1 de (2.4), que $y_1 - \tilde{y}$ est solution de (2.5). Ceci est évident car s'il existe un sous-ensemble J_1 de I tel que

$$\forall x \in J_1, \ a(x)y_1'(x) + b(x)y_1(x) = c(x),$$

alors, en soustrayant (2.6) à cette égalité pour tout $x \in J_1 \cap \tilde{J}$, il vient

$$\forall x \in J_1 \cap \tilde{J}, \ a(x)[y_1 - \tilde{y}]'(x) + b(x)[y_1 - \tilde{y}](x) = 0,$$

ce qui montre bien que $y_1 - \tilde{y}$ est solution de (2.5). ■

Résolution de (2.5)

Théorème 2.2.2 *Si la fonction a ne s'annule pas sur I, alors :*

$$S' = \{x \mapsto \lambda y_1(x), \ \lambda \in \mathbb{R}\} \text{ avec } y_1(x) = \mathrm{e}^{-\int \frac{b(x)}{a(x)}dx}, \ \forall x \in I.$$

Preuve
Comme a ne s'annule pas sur I, pour chaque x appartenant à un sous-ensemble de I, on a évidemment

$$a(x)y'(x)+b(x)y(x)=0 \Longleftrightarrow \underbrace{y'(x)+\frac{b(x)}{a(x)}y(x)}_{\mathrm{e}^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}\times\left(y(x)\mathrm{e}^{\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}\right)'} = 0.$$

Comme $\mathrm{e}^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}>0$, cette égalité équivaut simplement à $\left(y(x)\mathrm{e}^{\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}\right)'=0$. Par suite, on a

$$\begin{aligned}
(y \text{ est solution de (2.5)}) &\Longleftrightarrow \left(\left(y(x)\mathrm{e}^{\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}\right)'=0\right)\\
&\Longleftrightarrow \left(\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ y(x)\mathrm{e}^{\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}=\lambda\right)\\
&\Longleftrightarrow \left(\exists\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in I,\ y(x)=\lambda\mathrm{e}^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}\right).
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.2.1 *Les théorèmes 2.2.1 et 2.2.2 montrent que si l'on connaît une solution particulière $\tilde{y}$ de (2.4), alors $S=\{\tilde{y}+\lambda y_1,\ \lambda\in\mathbb{R}\}$.*

Calcul de y_1 : méthode de variation de la constante

L'idée est de rechercher la solution particulière $\tilde{y}$ sous la forme

$$\tilde{y}(x)=\alpha(x)\times y_1(x),$$

où α est une fonction dérivable sur I à déterminer.
Pour tout $x\in I$, on a donc :

$$\tilde{y}'(x)=\alpha'(x)y_1(x)+\alpha(x)\underbrace{y_1'(x)}_{-\frac{b(x)}{a(x)}y_1(x)},$$

ce qui implique

$$a(x)\tilde{y}'(x)+b(x)\tilde{y}(x)=\alpha'(x)a(x)y_1(x).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
(\tilde{y} \text{ est solution de (2.5)}) &\Longleftrightarrow (\alpha'(x)a(x)y_1(x)=c(x))\\
&\Longleftrightarrow \left(\alpha(x)=\int\frac{c(x)}{a(x)y_1(x)}dx\right),
\end{aligned}$$

car $a(x)y_1(x)\neq 0$ pour tout $x\in I$.

Conclusion : sous les hypothèses du théorème 2.2.2 (essentiellement $a(x) \neq 0,\ \forall x \in I$), on a :

$$S = \left\{ x \mapsto \left(\int \frac{c(x)}{a(x)y_1(x)} dx + \lambda \right) \times y_1(x),\ \lambda \in \mathbb{R}, \right\},$$

où $y_1(x) = \mathrm{e}^{-\int \frac{b(x)}{a(x)} dx}$ pour tout $x \in I$.

Exemple

La fonction $t \mapsto i(t)$ désignant l'intensité du courant électrique circulant (à partir du temps $t = 0$) dans un circuit RL muni d'un générateur sinusoïdal $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$, vérifie le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} Li'(t) + Ri(t) = E_0 \cos(\omega t) & \text{pour } t \geq 0; \\ i(0) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

On résout ce problème pour $t \geq 0$, c'est-à-dire que l'on choisit $I = \mathbb{R}_+$. Il s'agit donc de résoudre l'essm puis de chercher ensuite une solution particulière de l'équation différentielle.
Commençons par résoudre l'essm. On a, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} (Li'(t) + Ri(t) = 0) &\iff \left(i'(t) = -\frac{R}{L} i(t) \right) \\ &\iff \left(i(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t},\ \lambda \in \mathbb{R} \right). \end{aligned}$$

Par suite, nous prendrons $i_1(t) = \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$ de sorte que $S' = \{t \mapsto \lambda i_1(t),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.
Cherchons maintenant une solution particulière $\tilde{\imath}$ de cette équation différentielle. Pour cela, on applique la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire que l'on cherche $\tilde{\imath}$ sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \tilde{\imath}(t) = \alpha(t) i_1(t),$$

où α est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+$ à déterminer. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a ainsi

$$\tilde{\imath}'(t) = \alpha'(t) i_1(t) + \alpha(t) \underbrace{i_1'(t)}_{\frac{-R}{L} i_1(t)} = \alpha'(t) i_1(t) - \frac{R}{L} \underbrace{\alpha(t) i_1(t)}_{\tilde{\imath}(t)},$$

donc

$$\tilde{\imath}'(t) + \frac{R}{L} \tilde{\imath}(t) = \alpha'(t) i_1(t) = \frac{E_0}{L} \cos(\omega t),$$

ce qui entraîne

$$\alpha'(t) = \frac{E_0}{L} \underbrace{\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t} \cos(\omega t)}_{\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\left(\frac{R}{L} + j\omega\right)t}\right)},$$

et donne finalement :

$$\alpha(t) = \frac{E_0}{L} \mathrm{Re} \left(\int \mathrm{e}^{\left(\frac{R}{L} + j\omega\right)t} \right).$$

Comme une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{\left(\frac{R}{L}+j\omega\right)t}$ est $t \mapsto \frac{1}{\frac{R}{L}+j\omega}\mathrm{e}^{\left(\frac{R}{L}+j\omega\right)t}$ et que

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\frac{R}{L}+j\omega}\mathrm{e}^{\left(\frac{R}{L}+j\omega\right)t}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\frac{R}{L}-j\omega}{\frac{R^2}{L^2}+\omega^2}\mathrm{e}^{\left(\frac{R}{L}+j\omega\right)t}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}}{\frac{R^2}{L^2}+\omega^2}\left(\frac{R}{L}\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)\right)$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on peut choisir

$$\alpha(t) = \frac{E_0}{L}\frac{\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}}{\frac{R^2}{L^2}+\omega^2}\left(\frac{R}{L}\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)\right),$$

ce qui, en posant au préalable $\tau = \frac{L}{R}$, donne :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ \tilde{\imath}(t) = \frac{E_0}{R(1+\omega^2\tau^2)}\left[\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)\right].$$

Les théorèmes 2.2.1 et 2.2.2 assurent alors que l'ensemble des solutions S de l'équation différentielle $Li'(t) + Ri(t) = E_0\sin(\omega t)$ du système (2.8) s'écrit :

$$S = \{\tilde{y}+\lambda y_1,\ \lambda\in\mathbb{R}\} = \left\{t \mapsto i_\lambda(t) = \frac{E_0}{R(1+\omega^2\tau^2)}\left[\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)\right] + \lambda\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

Ensuite, l'unique réel λ pour lequel $i_\lambda(0) = 0$ est $\lambda = \frac{-E_0}{R(1+\omega^2\tau^2)}$, donc l'unique solution i de (2.8) est :

$$i(t) = \frac{E_0}{R(1+\omega^2\tau^2)}\left[\cos(\omega t)+\omega\sin(\omega t)-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right].$$

2.2.2 Équations à variables séparables

Définition

Une *équation à variables séparables* est une équation différentielle du premier ordre qui se met sous la forme

$$g(y)\times y' = f(x), \tag{2.9}$$

où f et g sont deux fonctions réelles de la variable réelle, qui possèdent toutes deux une primitive.

Résolution

Résoudre l'équation différentielle (2.9) revient à calculer (lorsque cela est possible) une primitive pour chacune des deux fonctions f et g. En effet, on a formellement :

$$\begin{aligned}(g(y)\times y' = f(x)) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\int g(y)\times\underbrace{\frac{dy}{dx}\times dx}_{dy} = \int f(x)dx + C,\ C\in\mathbb{R}\right)\\ &\Longleftrightarrow \quad \left(\int g(y)dy = \int f(x)dx + C,\ C\in\mathbb{R}\right).\end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned}
\Big(2yy' - y^2\cos x = \cos x\Big) &\iff \Big(2yy' = (1+y^2)\cos x\Big)\\
&\iff \left(\frac{2yy'}{1+y^2} = \cos x\right)\\
&\iff \left(\int \frac{2y}{1+y^2}dy = \int \cos x dx\right)\\
&\iff \Big(\ln(1+y^2) = \sin x + C,\ C \in \mathbb{R}\Big)\\
&\iff \Big(y^2 = -1 + \lambda \mathrm{e}^{\sin x},\ \lambda \in \mathbb{R}_+\Big).
\end{aligned}$$

2.3 Équations différentielles du second ordre

Ce sont des équations différentielles du type

$$F(x, y, y', y'') = 0, \tag{2.10}$$

où $F : \Omega \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, liant la variable x à y ainsi qu'à ses dérivées première et seconde.

2.3.1 Équation différentielle du second ordre se ramenant au premier ordre

Principe

Toute équation différentielle du second ordre de la forme

$$G(x, y', y'') = 0 \tag{2.11}$$

dans laquelle la quantité y n'apparaît pas, se ramène en fait à une équation différentielle du premier ordre.
En effet, si l'on pose $z = y'$, l'équation différentielle (2.11) s'écrit $G(x, z, z') = 0$. On voit ainsi que la fonction $z = y'$ est solution d'une équation différentielle du premier ordre.

Exemple

$$\begin{aligned}
\Big(y'' + (y')^2 = 0\Big) &\overset{z=y'}{\iff} \Big(z' + z^2 = 0\Big)\\
&\iff \left(\frac{-z'}{z^2} = 1\right)\\
&\iff \left(\left(\frac{1}{z}\right)' = 1\right)\\
&\iff \left(\frac{1}{z} = x - x_0,\ x_0 \in \mathbb{R}\right)\\
&\iff \left(y' = \frac{1}{x - x_0},\ x_0 \in \mathbb{R}\right)\\
&\iff \Big(y = \ln|x - x_0| + y_0,\ (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2\Big).
\end{aligned}$$

2.3.2 Équation différentielle linéaire du second ordre

On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre*, toute équation différentielle de la forme

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \tag{2.12}$$

dans laquelle a, b, c et f sont des fonctions continues sur un sous-ensemble commun I de $\mathbb{R}$.
On associe à (2.12) l'équation sans second-membre (essm)

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0. \tag{2.13}$$

Cas général : structure de l'ensemble des solutions

Par analogie avec les notations employées précédemment, on note S l'ensemble des solutions de (2.12) et S' celui de (2.13).

Théorème 2.3.1 *Soient y_1 et y_2 deux solutions de l'essm (2.13) vérifiant la condition*

$$\forall x,\ y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) \neq 0. \tag{2.14}$$

- *On a alors $S' = \{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$;*
- *Si l'on connaît de plus une solution particulière y_0 de (2.12), alors :*

$$S = \{y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Exemples. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$y'' + \omega^2 y = x. \tag{2.15}$$

Les fonctions $y_1 : x \mapsto \sin(\omega x)$ et $y_2 : x \mapsto \cos(\omega x)$ sont solutions de l'essm associée à (2.15). Elles vérifient de plus

$$\forall x \in \mathbb{R},\ y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = \omega \neq 0.$$

Ensuite, il est facile de voir que $x \mapsto \frac{x}{\omega^2}$ est une solution particulière de (2.15). Le théorème 2.3.1 garantit donc que

$$S = \{x \mapsto \lambda_1 \sin(\omega x) + \lambda_2 \cos(\omega x) + \frac{x}{\omega^2},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Connaîssant y_1, solution (non identiquement nulle) de (2.13), comment calculer y_2 qui satisfasse la condition (2.14)?
La méthode consiste à chercher y_2 sous la forme $y_2(x) = \alpha(x)y_1(x)$, où α est une fonction dérivable à déterminer. On a ainsi pour tout x :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_2'(x) & = & \alpha'(x)y_1(x) + \alpha(x)y_1'(x) \\ y_2''(x) & = & \alpha''(x)y_1(x) + 2\alpha'(x)y_1'(x) + \alpha(x)y_1''(x) \end{array}\right.$$

Or, on veut que y_2 soit solution de (2.13), c'est-à-dire que pour tout x, on ait :

$$a(x)\left[\alpha''(x)y_1(x)+2\alpha'(x)y_1'(x)+\alpha(x)y_1''(x)\right]+b(x)\left[\alpha'(x)y_1(x)+\alpha(x)y_1'(x)\right]+c(x)\alpha(x)y_1(x)=0,$$

soit :

$$\underbrace{a(x)y_1(x)\alpha''(x)+\left[2a(x)y_1'(x)+b(x)y_1(x)\right]\alpha'(x)}_{\substack{\text{équation différentielle en } \alpha \text{ que l'on résout}\\ \text{suivant la méthode de la section 2.3.1}}}+\underbrace{\left[a(x)y_1''(x)+b(x)y_1'(x)+c(x)y_1(x)\right]}_{0}\alpha(x)=0.$$

Exemple. On considère l'équation différentielle

$$x^2y''+xy'-y=0. \tag{2.16}$$

Elle possède une solution évidente $y_1(x)=x$. On cherche donc y_2 sous la forme

$$y_2(x)=\alpha(x)y_1(x)=x\alpha(x).$$

On obtient alors

$$x^2y_2''(x)+xy_2'(x)-y_2(x)=\left[3\alpha'(x)+x\alpha''(x)\right]x^2=0,$$

ce qui implique $3\alpha'(x)+x\alpha''(x)=0$ pour tout $x\neq 0$. Or, quel que soit $x\in\mathbb{R}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
(3\alpha'(x)+x\alpha''(x)=0) &\iff \left(\frac{\alpha''(x)}{\alpha'(x)}=-\frac{3}{x}\right)\\
&\iff \left(\ln\left|\frac{\alpha'(x)}{C}\right|=-3\ln|x|,\ C\in\mathbb{R}\right)\\
&\iff \left(\alpha'(x)=\frac{C}{x^3},\ C\in\mathbb{R}\right)\\
&\iff \left(\alpha(x)=\alpha_0+\frac{\lambda}{x^2},\ (\alpha_0,\lambda)\in\mathbb{R}^2\right).
\end{aligned}$$

Comme on cherche une solution y_2 de (2.16), on peut choisir $\alpha_0=0$ et $\lambda=1$ par exemple, de sorte que $y_2(x)=\frac{1}{x}$. En vertu du théorème 2.3.1, l'ensemble des solutions de (2.16) est :

$$S=\{\lambda_1x+\frac{\lambda_2}{x},\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\}.$$

Ces solutions sont définies sur $\mathbb{R}_-^*$ ou sur $\mathbb{R}_+^*$ lorsque $\lambda_2\neq 0$.

Calcul d'une solution particulière de (2.12) : méthode de variation des constantes.
Pour appliquer cette méthode, on suppose que :

- l'on connaît deux solutions y_1 et y_2 de (2.13) définies sur $I\subset\mathbb{R}$, qui vérifient la condition (2.14);
- la fonction $x\mapsto a(x)$ ne s'annule pas sur I.

On cherche alors une solution particulière y_0 de (2.12) sous la forme

$$y_0(x) = \alpha_1(x)y_1(x) + \alpha_2(x)y_2(x),$$

où α_1 et α_2 sont deux fonctions dérivables sur I à déterminer. Comme y_0 vérifie (2.12), cela fournit une relation entre les deux inconnues α_1, α_2 et leurs dérivées. Il est donc nécessaire d'en imposer une seconde :

$$\forall x \in I,\ \alpha_1'(x)y_1(x) + \alpha_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{2.17}$$

Compte tenu de (2.17), on a pour tout $x \in I$:

$$\left\{\begin{array}{lll} y_0'(x) & = & \alpha_1(x)y_1'(x) + \alpha_2(x)y_2'(x) \\ y_0''(x) & = & \alpha_1(x)y_1''(x) + \alpha_2(x)y_2''(x) + \alpha_1'(x)y_1'(x) + \alpha_2'(x)y_2'(x). \end{array}\right.$$

Or y_0 est solution de (2.12) sur I, donc pour tout $x \in I$, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & a(x)\underbrace{\left[\alpha_1(x)y_1''(x) + \alpha_2(x)y_2''(x) + \alpha_1'(x)y_1'(x) + \alpha_2'(x)y_2'(x)\right]}_{y_0''(x)} \\ & + & b(x)\underbrace{\left[\alpha_1(x)y_1'(x) + \alpha_2(x)y_2'(x)\right]}_{y_0'(x)} + c(x)\underbrace{\left[\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)\right]}_{y_0(x)}, \end{array}$$

soit, en tenant compte des relations $a(x)y_i''(x) + b(x)y_i'(x) + c(x)y_i(x) = 0$ pour $i = 1, 2$,

$$a(x)\left[y_1'(x)\alpha_1'(x) + y_2'(x)\alpha_2'(x)\right] = f(x),$$

ce qui donne finalement, puisque a ne s'annule pas sur I :

$$\forall x \in I,\ y_1'(x)\alpha_1'(x) + y_2'(x)\alpha_2'(x) = \frac{f(x)}{a(x)}. \tag{2.18}$$

Le système formé par les équations (2.17) et (2.18),

$$\forall x \in I, \left\{\begin{array}{l} \alpha_1'(x)y_1(x) + \alpha_2'(x)y_2(x) = 0 \\ y_1'(x)\alpha_1'(x) + y_2'(x)\alpha_2'(x) = \frac{f(x)}{a(x)}, \end{array}\right.$$

permet alors d'obtenir α_1' et α_2'. En effet, en multipliant (2.17) par $y_2'(x)$ et (2.18) par $y_2(x)$ et en soustrayant cette seconde équation à la première, il vient :

$$\forall x \in I,\ \left[y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)\right]\alpha_1'(x) = y_2(x)\frac{f(x)}{a(x)}.$$

Comme on a supposé $y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x) \neq 0$ pour chaque $x \in I$, cela montre que

$$\forall x \in I,\ \alpha_1'(x) = \frac{y_2(x)}{y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)} \times \frac{f(x)}{a(x)}.$$

De même, en multipliant (2.17) par $y_1'(x)$ et (2.18) par $y_1(x)$ et en soustrayant la seconde égalité obtenue à la première, on a :

$$\forall x \in I,\ \alpha_2'(x) = -\frac{y_1(x)}{y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x)} \times \frac{f(x)}{a(x)}.$$

Les fonctions α_1 et α_2 s'obtiennent ensuite par intégration de ces expressions. Evidemment, chacune d'entre-elles est déterminée à une constante additive près.

Exemple. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y = \tan x. \tag{2.19}$$

L'essm associée à (2.19) possède deux solutions évidentes $y_1(x) = \sin x$ et $y_2(x) = \cos x$ définies sur $I = \mathbb{R}$, qui satisfont la condition (2.14) sur cet intervalle. Ici, $a(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ donc a ne s'annule pas sur I. On peut donc appliquer la méthode de variation des constantes en cherchant une solution particulière y_0 de (2.19) sous la forme

$$y_0(x) = \alpha_1(x)\sin x + \alpha_2(x)\cos x,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

où α_1 et α_2 sont deux fonctions dérivables auxquelles on impose de vérifier

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha_1'(x)\sin x + \alpha_2'(x)\cos x = 0. \tag{2.20}$$

Cette condition entraîne pour tout $x \in \mathbb{R}$ que $y_0'(x) = \alpha_1(x)\cos x - \alpha_2(x)\sin x$ et $y_0''(x) = \alpha_1'(x)\cos x - \alpha_2'(x)\sin x - \alpha_1(x)\sin x - \alpha_2(x)\cos x$. Par suite, comme y_0 est solution de (2.19), un calcul simple montre que

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},\ \alpha_1'(x)\cos x - \alpha_2'(x)\sin x = \tan x.$$

Compte tenu de (2.20), α_1' et α_2' sont déterminées par le système :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},\ \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1'(x)\sin x + \alpha_2'(x)\cos x &=& 0 \\ \alpha_1'(x)\cos x - \alpha_2'(x)\sin x &=& \tan x. \end{array}\right.$$

On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},\ \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1'(x) &=& \sin x \\ \alpha_2'(x) &=& -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \frac{1}{\cos x}, \end{array}\right.$$

et donc, par intégration de ces deux égalités :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\},\ \left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1(x) &=& -\cos x + C_1 \\ \alpha_2(x) &=& \sin x - \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C_2, \end{array}\right.$$

où C_1 et C_2 sont des constantes réelles arbitrairement fixées. En choisissant $C_1 = C_2 = 0$ par exemple, une solution particulière de (2.19) est $x \mapsto -\cos x \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$. Le théorème 2.3.1 garantit alors que l'ensemble des solutions de (2.19) est :

$$S = \left\{x \mapsto -\cos x \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + \lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants* une équation différentielle de la forme

$$ay'' + by' + cy = f(x), \tag{2.21}$$

où f est une fonction et a, b, c sont des constantes réelles.
On associe à (2.21) l'équation sans second membre

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{2.22}$$

Résolution de l'essm (2.22).
On cherche les solutions de (2.22) sous la forme

$$y = \mathrm{e}^{rx} \text{ où } r \in \mathbb{C}.$$

On a donc $y'(x) = ry(x)$ et $y''(x) = r^2 y(x)$ et

$$\begin{aligned}(y \text{ est solution de (2.22)}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left((ar^2 + br + c)\underbrace{y(x)}_{\neq 0} = 0\right)\\ &\Longleftrightarrow \quad \left(ar^2 + br + c = 0\right).\end{aligned}$$

L'équation du second degré

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.23}$$

s'appelle *équation caractéristique associée à (2.22).* On peut maintenant distinguer deux cas :

- <u>1^{er} cas : l'équation caractéristique (2.23) possède deux racines distinctes r_1 et r_2.</u>
  Si l'on pose $y_1(x) = \mathrm{e}^{r_1 x}$ et $y_2(x) = \mathrm{e}^{r_2 x}$, on vérifie alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, que :

  $$y_1'(x)y_2(x) - y_1(x)y_2'(x) = \underbrace{(r_1 - r_2)}_{\neq 0}\underbrace{\mathrm{e}^{(r_1+r_2)x}}_{\neq 0} \neq 0.$$

  Par suite, le théorème 2.3.1 assure que

  $$S' = \left\{x \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

  Remarque 2.3.1 *Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, les racines r_1 et r_2 sont complexes conjuguées :*

  $$\left\{\begin{array}{rcl} r_1 & = & \alpha + j\omega \\ r_2 & = & \alpha - j\omega. \end{array}\right.$$

  La solution $x \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 x}$ est a priori une fonction de la variable réelle x à valeurs complexes. Mais, dans certains problèmes, on ne s'intéresse qu'aux solutions à valeurs réelles de (2.22). Comme les quantités $\mathrm{e}^{r_1 x}$ et $\mathrm{e}^{r_2 x}$ sont complexes conjuguées pour tout réel x, il suffit en fait de choisir $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$:

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \overline{\lambda_1}\mathrm{e}^{r_2 x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\underbrace{\left(\lambda_1 \mathrm{e}^{j\omega x} + \overline{\lambda_1}\mathrm{e}^{-j\omega x}\right)}_{2\mathrm{Re}(\lambda_1 \mathrm{e}^{j\omega x})}.$$

  Si l'on convient que $\lambda_1 = \lambda_0 + j\mu_0$ pour $(\lambda_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^2$, on a alors $\mathrm{Re}\left(\lambda_1 \mathrm{e}^{j\omega x}\right) = \lambda_0 \cos(\omega x) - \mu_0 \sin(\omega x)$, soit :

  $$\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = \left(\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)\right)\mathrm{e}^{\alpha x},$$

  où l'on a posé $\lambda = 2\lambda_0$ et $\mu = -2\mu_0$.

- $2^{\text{ème}}$ cas : l'équation caractéristique (2.23) possède une racine double $r_0 = \frac{-b}{2a}$.
  On ne dispose *a priori* dans ce cas que d'une seule solution de (2.22) : $y_1(x) = \mathrm{e}^{r_0 x}$. L'idée est de chercher y_2 sous la forme $y_2(x) = \alpha(x) y_1(x)$ où α est une fonction dérivable à déterminer. On obtient alors
  $$\left\{ \begin{array}{rcl} y_2'(x) & = & (\alpha'(x) + r_0\alpha(x)) y_1(x) \\ y_2''(x) & = & (\alpha''(x) + 2r_0\alpha'(x) + r_0^2\alpha(x)) y_1(x)), \end{array} \right.$$
  de sorte que
  $$\begin{array}{rcl} (y_2 \text{ est solution de (2.22)}) & \iff & \left(\left[a(\alpha''(x) + 2r_0\alpha'(x) + r_0^2\alpha(x)) + b(\alpha'(x) + r_0\alpha(x)) + c\alpha(x)\right] \underbrace{y_1(x)}_{\neq 0} = 0 \right) \\ & \iff & \left(\underbrace{(ar_0^2 + br_0 + c)}_{=0} \alpha(x) + \underbrace{(2ar_0 + b)}_{=0} \alpha'(x) + a\alpha''(x) = 0 \right) \\ & \iff & (\alpha''(x) = 0)\,. \end{array}$$
  Par suite, α est un polynôme de degré ≤ 1 :
  $$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \alpha(x) = \lambda x + \mu.$$
  On a donc $y_2(x) = (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{r_0 x}$. Si l'on choisit $\lambda = 1$ et $\mu = 0$, on vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$ que :
  $$y_1'(x) y_2(x) - y_1(x) y_2'(x) = (r_0 x - (1 + r_0 x))\, \mathrm{e}^{2r_0 x} = -\mathrm{e}^{2r_0 x} \neq 0,$$
  donc le théorème 2.3.1 permet d'écrire :
  $$S' = \left\{ x \mapsto (\lambda_1 x + \lambda_2)\mathrm{e}^{r_0 x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Résumé. Pour résoudre (2.22) on commence par calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'équation caractéristique (2.23) :

- si $\Delta > 0$, on a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, et :
  $$S' = \left\{ x \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\};$$
- si $\Delta = 0$, on a une solution réelle double $r_0 = \frac{-b}{2a}$, et :
  $$S' = \left\{ x \mapsto (\lambda_1 x + \lambda_2)\mathrm{e}^{r_0 x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\};$$
- si $\Delta < 0$, on a deux solutions complexes conjuguées $\alpha \pm j\omega$, et :
  $$S' = \left\{ x \mapsto [\lambda_1 \cos(\omega x) + \lambda_2 \sin(\omega x)]\, \mathrm{e}^{\alpha x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exemples : L'équation linéaire du second ordre à coefficients constants

1. $y'' + 3y' + 2y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + 3r + 2 = 0$. Celle-ci possède deux racines réelles distinctes : -1 et -2. Par suite :
$$S' = \left\{x \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{-x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-2x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

2. $y'' + 2y' + y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + 2r + 1 = 0$. Cette dernière ayant -1 pour racine double, on en déduit :
$$S' = \left\{x \mapsto (\lambda_1 x + \lambda_2)\mathrm{e}^{-x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

3. $y'' + 2y' + 2y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + 2r + 2 = 0$. Cette équation possède deux racines complexes conjuguées : $-1 \pm j$, ce qui entraîne :
$$S' = \left\{x \mapsto (\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x)\mathrm{e}^{-x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Résolution de l'équation complète (2.21).
On vient de voir comment résoudre l'essm (2.22), ce qui fournit
$$S' = \left\{x \mapsto \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x),\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Pour résoudre l'équation complète (2.21), il suffit, en vertu du théorème 2.3.1, de calculer une solution particulière $\tilde{y}$ de (2.21). Pour cela, on peut appliquer la méthode de variation des constantes. Mais cette méthode a l'inconvénient de donner des calculs assez lourds. Une autre méthode consiste à chercher directement l'expression de $\tilde{y}$. Cette recherche est facile lorsque f prend certaines formes particulières. Nous allons maintenant détailler deux de ces cas particuliers.

- 1^{er} cas : $f(x) = P_n(x)$ où $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$.
  La méthode consiste à chercher $\tilde{y}$ sous la forme d'un polynôme
  - de degré n, si $c \neq 0$;
  - de degré $n + 1$, si $c = 0$ et $b \neq 0$;
  - de degré $n + 2$, si $c = b = 0$.

  Exemple. On considère l'équation linéaire du second ordre à coefficients constants
  $$y'' + 3y' + 2y = 2x^2 + 8x + 4.$$
  Comme les coefficients c et b de cette équation sont tous deux non nuls, on cherche une solution particulière $\tilde{y}$ sous la forme d'un polynôme de degré 2 :
  $$\tilde{y}(x) = ux^2 + vx + w,\ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3.$$
  On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
  $$\underbrace{\tilde{y}''(x)}_{2u} + 3\underbrace{\tilde{y}'(x)}_{2ux+v} + 2\underbrace{\tilde{y}(x)}_{ux^2+vx+w} = 2x^2 + 8x + 4,$$

soit, en regroupant suivant les puissances décroissantes de x :

$$2ux^2 + (6u + 2v)x + 2u + 3v + 2w = 2x^2 + 8x + 4,$$

ce qui implique

$$\left\{\begin{array}{lllllll} 2u & & & & & = & 2 \\ 6u & + & 2v & & & = & 8 \\ 2u & + & 3v & + & 2w & = & 4 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} u & = & 1 \\ v & = & 1 \\ w & = & -\frac{1}{2}, \end{array}\right.$$

et donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tilde{y}(x) = x^2 + x - \frac{1}{2}.$$

Comme on a vu dans l'exemple précédent que

$$S' = \left\{x \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{-x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-2x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\},$$

on déduit de ce qui précède :

$$S = \left\{x \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{-x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-2x} + x^2 + x - \frac{1}{2},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

- 2$^{\text{ème}}$ cas : $f(x) = \mathrm{e}^{zx} P_n(x)$ où $z \in \mathbb{C}$ et $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, $n \in \mathbb{N}$.
On cherche ici une solution particulière de (2.21) de la forme $\tilde{y}(x) = \alpha(x)\mathrm{e}^{zx}$ où α est une fonction deux fois dérivable à déterminer. On a ainsi

$$\left\{\begin{array}{lll} \tilde{y}'(x) & = & (z\alpha(x) + \alpha'(x))\mathrm{e}^{zx} \\ \tilde{y}''(x) & = & (\alpha''(x) + 2z\alpha'(x) + z^2\alpha(x))\mathrm{e}^{zx}, \end{array}\right.$$

de sorte que,

$$\begin{array}{lll} (\tilde{y} \text{ est solution de (2.21)}) & \Longleftrightarrow & \left(\left[a\alpha''(x) + (2az + b)\alpha'(x) + (az^2 + bz + c)\alpha(x)\right] \underbrace{\mathrm{e}^{zx}}_{\neq 0} = P_n(x)\mathrm{e}^{zx}\right) \\ & \Longleftrightarrow & \left(a\alpha''(x) + (2az + b)\alpha'(x) + (az^2 + bz + c)\alpha(x) = P_n(x)\right). \end{array}$$

On est ainsi ramené au cas précédent. On cherchera donc α sous la forme d'un polynôme

- de degré n, si $az^2 + bz + c \neq 0$, c'est-à-dire si z n'est pas racine de l'équation caractéristique (2.23);
- de degré $n + 1$, si $az^2 + bz + c = 0$ et $2az + b \neq 0$, c'est-à-dire si z est racine simple de l'équation caractéristique (2.23);
- de degré $n + 2$, si $az^2 + bz + c = 0$ et $2az + b = 0$, c'est-à-dire si z est racine double de l'équation caractéristique (2.23).

Exemple. On considère maintenant l'équation linéaire du second ordre à coefficients constants

$$y'' - y = 2x\mathrm{e}^x.$$

Ici, $z = 1$ est racine simple de l'équation caractéristique $r^2 - 1 = 0$. On cherche une solution particulière $\tilde{y}$ sous la forme $\mathrm{e}^x\alpha(x)$ où α est un polynôme de degré $1 + 1 = 2$:

$$\tilde{y}(x) = \mathrm{e}^x(ux^2 + vx + w),\ (u, v, w) \in \mathbb{R}^3.$$

Le polynôme α doit donc vérifier pour chaque $x \in \mathbb{R}$:

$$\underbrace{\alpha''(x)}_{2u} + 2\underbrace{\alpha'(x)}_{2ux+v} = 2x,$$

soit, en regroupant suivant les puissances décroissantes de x :

$$2ux + u + v = x,$$

ce qui entraîne

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2u & & & = & 1 \\ u & + & v & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} u & = & \frac{1}{2} \\ v & = & -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

On remarque ainsi que le réel w n'est pas déterminé par les conditions choisies : il est donc quelconque. Comme on cherche une solution particulière, on peut faire le choix de prendre $w = 0$, de sorte que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \tilde{y}(x) = \mathrm{e}^x\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right).$$

Comme l'essm $y'' - y = 0$ a pour ensemble solution

$$S' = \left\{x \mapsto \lambda_1\mathrm{e}^x + \lambda_2\mathrm{e}^{-x},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\},$$

on en déduit finalement :

$$S = \left\{x \mapsto \lambda_1\mathrm{e}^x + \lambda_2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right),\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$