Aix-Marseille Université
Institut Universitaire de Technologie
Département Réseaux & Télécommunications

Année 2020-2021
M2204
Calculs différentiel et intégral

Équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordres 1 et 2

Table des matières

1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Étant donnés $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où I est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, suivante

$$ay'(x) + by(x) = f(x), \;\; x \in I. \tag{1}$$

L'objectif est de caractériser l'ensemble S de toutes les fonctions dérivables $y : I \to \mathbb{R}$, qui satisfont (1).

1.1 Équation sans second membre

L'équation sans second membre associée à (1) est celle obtenue en imposant $f = 0$ dans (1) :

$$ay'(x) + by(x) = 0, \;\; x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}
ay'(x) + by(x) = 0, \;\; x \in \mathbb{R} \iff & \; e^{\frac{b}{a}x}\left(ay'(x) + by(x)\right) = 0, \;\; x \in \mathbb{R} \\
\iff & \; a\left(e^{\frac{b}{a}x}y\right)'(x) = 0, \;\; x \in \mathbb{R} \\
\iff & \; \exists \lambda \in \mathbb{R}, \;\; e^{\frac{b}{a}x}y(x) = \lambda, \;\; x \in \mathbb{R} \\
\iff & \; \exists \lambda \in \mathbb{R}, \;\; y(x) = \lambda e^{-\frac{b}{a}x}, \;\; x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre (2), associée à (1), est :

$$S_0 = \{x \mapsto \lambda e^{-\frac{b}{a}x}, \;\; \lambda \in \mathbb{R}\}. \tag{3}$$

Exemple 1. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = 0, \;\; x \in \mathbb{R},$$

est $S_0 = \{x \mapsto \lambda e^{-2x}, \;\; \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1.2 Structure de l'ensemble des solutions

Soit y_* une solution de (1) :

$$ay_*'(x) + by_*(x) = f(x), \;\; x \in I. \tag{4}$$

En soustrayant (4) à (1), on voit que y est solution de (1) si et seulement si on a

$$a(y - y_*)'(x) + b(y - y_*)(x) = 0, \;\; x \in I.$$

Autrement dit, y est solution de (1) si et seulement si $y - y_*$ est solution de l'équation sans second membre (2), c'est-à-dire si et seulement si $y - y_* \in S_0$. En vertu de (3), cela équivaut à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$y(x) = \lambda e^{-\frac{b}{a}x} + y_*(x), \;\; x \in I.$$

Par conséquent, nous avons :

$$S = S_0 + y_* = \{x \mapsto \lambda e^{-\frac{b}{a}x} + y_*(x),\ \lambda \in \mathbb{R}\}. \tag{5}$$

L'ensemble S des solutions de (1) se déduit donc de celui, S_0, des solutions de l'équation sans second membre (2), et de la connaissance d'une solution particulière y_* de l'équation (1).

Exemple 2. Comme l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = 1,\ x \in \mathbb{R},$$

admet $y_*(x) = \frac{1}{2}$ comme solution particulière évidente, l'ensemble de toutes les solutions de cette équation est $S = \{x \mapsto \lambda e^{-2x} + \frac{1}{2},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

1.3 Calcul d'une solution particulière

1.3.1 Cas où $f(x) = P(x)$, $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $n \in \mathbb{N}$

Il s'agit de chercher y_* sous la forme d'un polynôme $y_*(x) = Q(x)$, vérifiant la condition suivante :

i) si $b \neq 0$ alors $Q \in \mathbb{R}_n[x]$;

ii) si $b = 0$ alors $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$ et la valuation de Q est égale à 1.

Exemple 3. a) Comme le deuxième coefficient dans l'équation différentielle

$$y'(x) + 2y(x) = x - 1,\ x \in \mathbb{R},$$

est non nul, et que $P(x) = x - 1 \in \mathbb{R}_1[x]$, on cherche y_* sous la forme d'un polynôme de degré 1, c'est-à-dire $y_*(x) = Ax + B$ où $A, B \in \mathbb{R}$. Par suite, $y_*'(x) = A$ et

$$y_*'(x) + 2y_*(x) = 2Ax + A + 2B = x - 1 \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 2A & = & 1 \\ A + 2B & = & -1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} A & = & \frac{1}{2} \\ B & = & -\frac{3}{4}, \end{array} \right.$$

de sorte que l'on a $y_*(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle s'écrit donc

$$S = \left\{ x \mapsto e^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{3}{4},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Par contre, le coefficient du terme $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = x,\ x \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

vaut 0 donc on peut se contenter de chercher la solution particulière y_* sous la forme d'un polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$, de valuation égale à 1 : $y_*(x) = Ax^2 + Bx$ avec $A, B \in \mathbb{R}$. Ainsi $y_*'(x) = 2Ax + B$ donc l'équation $y_*'(x) = x$ implique $2A = 1$ et $B = 0$, soit $y_*(x) = \frac{x^2}{2}$. Comme l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre associée à (6), $y'(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$, est $S_0 = \{x \mapsto \lambda e^{0x} = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, alors celui de (6) s'écrit

$$S = \left\{ x \mapsto \lambda + \frac{x^2}{2},\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

1.3.2 Cas où $f(x) = P(x)e^{sx}$, $s \in \mathbb{R}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $n \in \mathbb{N}$

Dans ce cas, on cherche y_* sous la forme $y_*(x) = Q(x)e^{sx}$, où :

i) si $s \neq -\frac{b}{a}$ alors $Q \in \mathbb{R}_n[x]$;

ii) si $s = -\frac{b}{a}$ alors $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$ est de valuation égale à 1.

Exemple 4. a) Comme $3 \neq \frac{5}{2}$, on peut chercher une solution particulière de l'équation différentielle

$$2y'(x) - 5y(x) = xe^{3x},\ x \in \mathbb{R},$$

sous la forme particulière $y_*(x) = (Ax + B)e^{3x}$, avec $A, B \in \mathbb{R}$. En utilisant le fait que $y_*'(x) = (3Ax + A + 3B)e^{3x}$, il vient

$$2y_*'(x)-5y_*(x) = (Ax+2A+B)e^{3x} = xe^{3x} \iff \left\{\begin{array}{lcl} A & = & 1 \\ 2A + B & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcr} A & = & 1 \\ B & = & -2, \end{array}\right.$$

de sorte que l'on a $y_*(x) = (x-2)e^{3x}$. L'ensemble des solutions s'écrit donc

$$S = \left\{x \mapsto \lambda e^{\frac{5}{2}x} + (x-2)e^{3x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

b) Pour l'équation différentielle

$$y'(x) - y(x) = xe^{x},\ x \in \mathbb{R},$$

on peut se contenter de chercher y_* sous la forme $e^x(Ax^2 + Bx)$, où $A, B \in \mathbb{R}$. Ainsi, $y_*'(x) = (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x$ et donc

$$y_*'(x) - y_*(x) = (2Ax + B)e^x = xe^x \iff \left\{\begin{array}{lcl} 2A & = & 1 \\ B & = & 0, \end{array}\right.$$

ce qui donne $y_*(x) = \frac{x^2}{2}e^x$. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle linéaire est donc

$$S = \left\{x \mapsto \left(\lambda + \frac{x^2}{2}\right)e^x,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

1.3.3 Cas où $f(x) = \alpha\sin(\omega x + \varphi) + \beta\cos(\omega x + \varphi)$, $\omega \in \mathbb{R}^*$, α, β, $\varphi \in \mathbb{R}$

Dans ce cas, il faut chercher y_* sous la forme suivante

$$y_*(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + B\cos(\omega x + \varphi),$$

où A et B sont deux réels à identifier.

Exemple 5. On peut chercher une solution particulière de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = 2\cos x,\ x \in \mathbb{R},$$

sous la forme particulière $y_*(x) = A\sin x + B\cos x$, avec $A, B \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on a $y_*'(x) = -B\sin x + A\cos x$, ce qui donne

$$y_*'(x) + y_*(x) = (A - B)\sin x + (A + B)\cos x = 2\cos x \iff \left\{\begin{array}{lcl} A - B & = & 0 \\ A + B & = & 2, \end{array}\right.$$

et donc $A = B = 1$. Par suite, $y_*(x) = \sin x + \cos x$, ce qui permet finalement de décrire l'ensemble des solutions comme suit :

$$S = \left\{x \mapsto \lambda e^{-x} + \sin x + \cos x,\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

1.3.4 Cas général : méthode de variation de la constante

L'idée de la méthode est de chercher y_* sous la forme

$$y_*(x) = \eta(x)e^{-\frac{b}{a}x},$$

où η désigne ici une fonction dérivable inconnue, à déterminer. De cette façon, on a

$$y_*'(x) = \left(\eta'(x) - \frac{b}{a}\eta(x)\right)e^{-\frac{b}{a}x} = \eta'(x)e^{-\frac{b}{a}x} - \frac{b}{a}y_*(x),$$

de sorte que

$$ay_*'(x) + by_*(x) = a\eta'(x)e^{-\frac{b}{a}x}.$$

Comme y_* est solution de (1), cela implique que

$$a\eta'(x)e^{-\frac{b}{a}x} = f(x),$$

et donc

$$\eta'(x) = \frac{1}{a}f(x)e^{\frac{b}{a}x} \Rightarrow \eta(x) = \frac{1}{a}\int f(x)e^{\frac{b}{a}x}dx.$$

Exemple 6. On cherche à déterminer une solution particulière de l'équation différentielle

$$y'(x) - y(x) = (\tan x)e^x,\ x \in I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[,$$

sous la forme particulière $y_*(x) = \eta(x)e^x$, où η est une fonction dérivable sur I, que l'on veut préciser. Par un calcul simple, on a $y_*'(x) = (\eta(x) + \eta'(x))e^x$ et donc

$$y_*'(x) - y_*(x) = \eta'(x)e^x = (\tan x)e^x \Longleftrightarrow \eta'(x) = \tan x.$$

Par conséquent, il suffit de prendre $\eta(x) = -\ln|\cos x|$ pour tout $x \in I$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle étudiée se met donc sous la forme :

$$S = \{x \mapsto (\lambda - \ln|\cos x|)\, e^x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

1.3.5 Principe de superposition

Si y_* est une solution de l'équation différentielle (1),

$$ay_*'(x) + by_*(x) = f(x),\ x \in I,$$

et que $\tilde{y}_*$ est solution de la même équation différentielle, mais associée à un second membre $\tilde{f}$, lui aussi défini sur I,

$$a\tilde{y}_*'(x) + b\tilde{y}_*(x) = \tilde{f}(x),\ x \in I,$$

alors on voit facilement, en additionnant les deux égalités précédentes et en utilisant la linéarité de la dérivation par rapport à la variable x, que $y_* + \tilde{y}_*$ est solution de cette même équation différentielle, mais associée cette fois au second membre $f + \tilde{f}$:

$$a(y_* + \tilde{y}_*)'(x) + b(y_* + \tilde{y}_*)(x) = f(x) + \tilde{f}(x),\ x \in I.$$

Autrement dit, pour calculer une solution particulière de l'équation différentielle

$$ay'(x) + by(x) = f(x) + \tilde{f}(x),\ x \in I,$$

il suffit superposer (au sens de l'addition des fonctions) une solution particulière de l'équation différentielle

$$ay'(x) + by(x) = f(x),\ x \in I,$$

à une solution particulière de l'équation différentielle

$$ay'(x) + by(x) = \tilde{f}(x),\ x \in I.$$

Exemple 7. Pour déterminer une solution particulière de l'équation différentielle

$$y'(x) - y(x) = (\tan x)e^x + 1,\ x \in I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tag{7}$$

on se réfère à l'Exemple 6, qui fournit $y_*(x) = -(\ln|\cos x|)e^x$, $x \in I$, comme solution particulière de l'équation différentielle

$$y'(x) - y(x) = (\tan x)e^x,\ x \in I.$$

Ensuite, on remarque que $\tilde{y}_*(x) = -1$, $x \in I$, est solution particulière de l'équation différentielle

$$y'(x) - y(x) = 1,\ x \in I.$$

En vertu du principe de superposition, la fonction $x \mapsto y_*(x) + \tilde{y}_*(x) = -(\ln|\cos x|)e^x - 1$, qui est définie sur I, est donc bien solution de l'équation différentielle (7) :

$$(y_* + \tilde{y}_*)'(x) - (y_* + \tilde{y}_*)(x) = (\tan x)e^x + 1,\ x \in I.$$

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Étant donnés $a \in \mathbb{R}^*$, $b, c \in \mathbb{R}$ et $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où I est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}$, on considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, suivante :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x), \; x \in I. \tag{8}$$

L'objectif est ici de décrire l'ensemble S de toutes les fonctions deux fois dérivables $y : I \to \mathbb{R}$, qui satisfont (8).

2.1 Équation sans second membre

L'équation sans second membre associée à (8) est celle obtenue en remplaçant f par la fonction identiquement nulle sur I, dans (8) :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0, \; x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Étant donné $r \in \mathbb{R}$, on remarque que la fonction $x \mapsto e^{rx}$ est solution de (9) si et seulement si le réel r est solution de l'*équation caractéristique* associée à (9) :

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{10}$$

Théorème 1. L'ensemble des solutions S_0 de l'équation sans second membre (9) est entièrement déterminé par les solutions de l'équation caractéristique, comme suit :

i) Si (10) admet *deux racines réelles distinctes* $r_1 \neq r_2$, alors :

$$S_0 = \{x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\};$$

ii) Si (10) admet *une racine (double)* $r_0 \in \mathbb{R}$, alors :

$$S_0 = \{x \mapsto (\lambda x + \mu) e^{r_0 x}, \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\};$$

iii) Si (10) admet *deux racines complexes* conjuguées $r_\pm = \omega \pm i\theta$, alors :

$$S_0 = \{x \mapsto e^{\omega x} \left(\lambda \sin(\theta x) + \mu \cos(\theta x)\right), \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Le théorème est admis. On remarque dans le cas (iii) du Théorème 1, que les deux racines complexes de l'équation caractéristique (10) sont nécessairement conjuguées l'une par rapport à l'autre car les coefficients de l'équation algébrique du second degré (10) sont tous réels.

Exemple 8. a) L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$y''(x) - y(x) = 0, \; x \in \mathbb{R},$$

est $r^2 - 1 = (r-1)(r+1) = 0$. Elle admet deux racines réelles distinctes, qui sont $r_1 = -1$ et $r_2 = 1$. Par suite, on a :

$$S_0 = \{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{x}, \; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

b) L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0, \ x \in \mathbb{R},$$

est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$. Elle admet une racine double, qui est $r_0 = 1$. Ainsi,

$$S_0 = \{x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

c) L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$y''(x) + y(x) = 0, \ x \in \mathbb{R},$$

est $r^2 + 1 = (r-i)(r+i) = 0$. Elle admet donc deux racines complexes conjuguées, à savoir $r_\pm = \pm i$, ce qui permet d'écrire :

$$S_0 = \{x \mapsto \lambda \sin x + \mu \cos x, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

2.2 Structure de l'ensemble des solutions

Soit y_* une solution de (8) :

$$ay_*''(x) + by_*'(x) + cy_*(x) = f(x), \ x \in I. \tag{11}$$

Alors, en soustrayant (11) à (8), on voit que y est solution de (8) si et seulement si :

$$a(y - y_*)''(x) + b(y - y_*)'(x) + c(y - y_*)(x) = 0, \ x \in I.$$

Ainsi, y est solution de (1) si et seulement si $y - y_* \in S_0$, c'est-à-dire si et seulement si $y - y_*$ est solution de l'équation sans second membre (9). Par suite, y est solution de (1) si et seulement si on a

$$y(x) = \tilde{y}(x) + y_*(x), \ x \in I,$$

où $\tilde{y}$ est donnée par le Theorème 1. Par conséquent, l'ensemble S des solutions de (8) se déduit simplement de S_0, celui des solutions de l'équation sans second membre (9) associée à (8), en lui ajoutant une solution particulière y_* de l'équation (8) :

$$S = S_0 + y_*.$$

Exemple 9. L'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$y''(x) + y(x) = 1, \ x \in \mathbb{R},$$

possède $y_*(x) = 1$ comme solution particulière évidente. Donc, d'après l'Exemple 8 c), l'ensemble de toutes les solutions de cette équation s'écrit :

$$S = \{x \mapsto \lambda \sin x + \mu \cos x + 1, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

2.3 Calcul d'une solution particulière

2.3.1 Cas où $f(x) = P(x)$, $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $n \in \mathbb{N}$

Il s'agit de chercher y_* sous la forme d'un polynôme $y_*(x) = Q(x)$, où :

i) si $c \neq 0$ alors $Q \in \mathbb{R}_n[x]$;

ii) si $c = 0$ et $b \neq 0$ alors $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$ et la valuation de Q est égale à 1 ;

iii) si $c = b = 0$ alors $Q \in \mathbb{R}_{n+2}[x]$ et la valuation de Q est égale à 2.

Exemple 10. a) Pour l'équation différentielle

$$y''(x) - y(x) = x - 1,\ x \in \mathbb{R},$$

on a $P(x) = x - 1 \in \mathbb{R}_1[x]$. et comme $c = -1 \neq 0$, on peut donc chercher y_* sous la forme d'un polynôme de degré 1, c'est-à-dire $y_*(x) = Ax + B$ avec $A, B \in \mathbb{R}$. Cela entraîne $y'_*(x) = A$, $y''_*(x) = 0$ et

$$(y''_*(x) - y_*(x) = -Ax - B = x - 1) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcr} -A & = & 1 \\ -B & = & -1. \end{array} \right.$$

Ainsi $y_*(x) = -x + 1$ et l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{x} - x + 1,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Dans le cas particulier de l'équation différentielle

$$y''(x) + y'(x) = x - 1,\ x \in \mathbb{R},$$

on peut se contenter de chercher y_* sous la forme d'un polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$, dont la valuation est égale à 1. Autrement dit $y_*(x) = Ax^2 + Bx$ avec $A, B \in \mathbb{R}$. Ainsi, on a $y'_*(x) = 2Ax + B$ et $y''_*(x) = 2A$, ce qui implique

$$(y''_*(x) + y'_*(x) = 2Ax + 2A + B = x - 1) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcr} 2A & = & 1 \\ 2A + B & = & -1, \end{array} \right.$$

et donc $A = \frac{1}{2}$ et $B = -2$, soit finalement $y_*(x) = \frac{x^2}{2} - 2x$. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est donc

$$S = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu + \frac{x^2}{2} - 2x,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.3.2 Cas où $f(x) = P(x)e^{sx}$, $s \in \mathbb{R}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[x]$, $n \in \mathbb{N}$

Dans ce cas, on cherche y_* sous la forme $y_*(x) = Q(x)e^{sx}$, où :

i) si s n'est pas solution de l'équation caractéristique, c'est-à-dire si $as^2 + bs + c \neq 0$, alors $Q \in \mathbb{R}_n[x]$;

ii) si s est racine simple de l'équation caractéristique, c'est-à-dire si $as^2 + bs + c = 0$ et $2as + b \neq 0$, alors $Q \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$ et sa valuation est égale à 1 ;

iii) si s est racine double de l'équation caractéristique, c'est-à-dire si $as^2 + bs + c = 0$ et $2as + b = 0$, alors $Q \in \mathbb{R}_{n+2}[x]$ et sa valuation est égale à 2.

Exemple 11. a) Commençons par chercher une solution particulière de l'équation différentielle
$$y''(x) + y(x) = xe^x, \ x \in \mathbb{R}.$$
Comme $s = 1$ n'est pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + 1 = (r - i)(r + i) = 0$ alors il suffit de chercher y_* sous la forme $(Ax + B)e^x$, avec $A, B \in \mathbb{R}$. On a alors $y_*'(x) = (Ax + A + B)e^x$ et $y_*''(x) = (Ax + 2A + B)e^x$, de sorte que
$$(y_*''(x) + y_*(x) = 2(Ax + A + B)e^x = xe^x) \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 2A & = & 1 \\ 2A + 2B & = & 0. \end{array} \right.$$
Ainsi, on a $y_*(x) = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) e^x$ et l'ensemble des solutions s'écrit
$$S = \left\{ x \mapsto \lambda \sin x + \mu \cos x + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) e^x, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Par contre, pour l'équation différentielle
$$y''(x) - y(x) = xe^x, \ x \in \mathbb{R},$$
on voit que $s = 1$ est solution simple de l'équation caractéristique $r^2 - 1 = (r-1)(r+1) = 0$, ce qui amène à rechercher la solution particulière y_* sous la forme $(Ax^2 + Bx)e^x$, où $A, B \in \mathbb{R}$. Ainsi, on a $y_*'(x) = (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x$ et $y_*''(x) = (Ax^2 + (4A + B)x + 2(A + B))e^x$, donc
$$(y_*''(x) - y_*(x) = 2(2Ax + A + B)e^x = xe^x) \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 4A & = & 1 \\ A + B & = & 0, \end{array} \right.$$
donne directement $A = \frac{1}{4}$ et $B = -\frac{1}{4}$, soit $y_*(x) = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\right) e^x$. L'ensemble des solutions de cette équation différentielle est donc
$$S = \left\{ x \mapsto \lambda e^{-x} + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4} + \mu\right) e^x, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

c) Enfin, dans le cas de l'équation différentielle
$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = (x - 1)e^x, x \in \mathbb{R},$$
on vérifie que $s = 1$ est racine double de l'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = (r - 1)^2 = 0$, ce qui indique que la solution particulière y_* peut être choisie sous la forme $(Ax^3 + Bx^2)e^x$, avec $A, B \in \mathbb{R}$. Ensuite, comme $y_*'(x) = (Ax^3 + (3A + B)x^2 + 2Bx)e^x$ et $y_*''(x) = (Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B)x + 2B)e^x$, on voit que
$$(y_*''(x) - 2y_*'(x) + y_*'(x) = (6Ax + 2B)e^x = (x - 1)e^x) \iff \left\{ \begin{array}{lcl} 6A & = & 1 \\ 2B & = & -1, \end{array} \right.$$
ce qui donne $A = \frac{1}{6}$ et $B = -\frac{1}{2}$. Ainsi $y_*(x) = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2}\right) e^x$ et l'ensemble des solutions cherché est
$$S = \left\{ x \mapsto \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \lambda x + \mu\right) e^x, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.3.3 Cas où $f(x) = \alpha \sin(\omega x + \varphi) + \beta \cos(\omega x + \varphi)$, $\omega \in \mathbb{R}^*$, α, β, $\varphi \in \mathbb{R}$

Dans ce cas, la règle usuelle est de chercher y_* sous la forme suivante :

i) si $i\omega$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, alors

$$y_*(x) = A \sin(\omega x + \varphi) + B \cos(\omega x + \varphi), \ A, B \in \mathbb{R}.$$

ii) si $i\omega$ est solution de l'équation caractéristique, alors

$$y_*(x) = x \left(A \sin(\omega x + \varphi) + B \cos(\omega x + \varphi) \right), \ A, B \in \mathbb{R}.$$

Exemple 12. a) Comme $2i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$, on peut donc chercher une solution particulière de l'équation différentielle

$$y''(x) + y(x) = \sin(2x), \ x \in \mathbb{R},$$

sous la forme $y_*(x) = A \sin(2x) + B \cos(2x)$. On a donc $y_*''(x) = -4(A \sin(2x) + B \cos(2x))$, de sorte que

$$(y_*''(x) + y_*(x) = -3(A \sin(2x) + B \cos(2x)) = \sin(2x)) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} -3A & = & 1 \\ -3B & = & 0. \end{array} \right.$$

Ainsi, $y_*(x) = -\frac{\sin(2x)}{3}$ et l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{ x \mapsto \lambda \sin x + \mu \cos x - \frac{\sin(2x)}{3}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Par contre, dans le cas particulier de l'équation différentielle

$$y''(x) + y(x) = \cos x, \ x \in \mathbb{R},$$

il s'avère que i est bien solution de l'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$. On est donc amené à rechercher la solution particulière y_* sous la forme $x(A \sin x + B \cos x)$, avec $A, B \in \mathbb{R}$. Ceci entraîne $y_*'(x) = A \sin x + B \cos x + x(-B \sin x + A \cos x)$ et $y_*''(x) = 2(-B \sin x + A \cos x) - x(A \sin x + B \cos x)$, et donc

$$(y_*''(x) + y_*(x) = 2(-B \sin x + A \cos x) = \cos x) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} -2B & = & 0 \\ 2A & = & 1. \end{array} \right.$$

Comme ce système admet $A = \frac{1}{2}$ et $B = 0$ pour unique solution, on obtient que $y_*(x) = \frac{x}{2} \sin x$, ce qui fait que l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est

$$S = \left\{ x \mapsto \left(\lambda + \frac{x}{2} \right) \sin x + \mu \cos x, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.3.4 Cas général : méthode de variation des constantes

Plutôt que d'exposer la méthode en toute généralité, voyons comment procéder pour l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants suivante :

$$y''(x) + y(x) = 2 \cos^2 x = 2(\cos x)^2, \ x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

L'équation caractéristique associée à (12) s'écrit $r^2 + 1 = 0$ donc elle possède deux racines complexes conjuguées, $\pm i$. Donc, d'après le Théorème 1, l'ensemble des solutions de l'équation sans second membre associée à (12) s'écrit :

$$S_0 = \{x \mapsto \lambda \sin x + \mu \cos x,\ \ \lambda,\ \ \mu \in \mathbb{R}\}, \tag{13}$$

La méthode consiste à chercher une solution particulière y_* de (12), sous la forme suivante

$$y_*(x) = \eta(x) \sin x + \zeta(x) \cos x, \tag{14}$$

obtenue en remplaçant les constantes λ et μ dans l'expression générale (13) de la solution de l'équation sans second membre associée à (12), par deux fonctions inconnues $x \mapsto \eta(x)$ et $x \mapsto \zeta(x)$. Afin d'identifer η et ζ de façon unique, on impose la condition *a priori* suivante :

$$\eta'(x) \sin x + \zeta'(x) \cos x = 0,\ \ x \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

puis on traduit le fait que la fonction y_*, définie par (14), est solution de (12). Comme

$$y_*'(x) = \eta'(x) \sin x + \zeta'(x) \cos x + \eta(x) \cos x - \zeta(x) \sin x = \eta(x) \cos x - \zeta(x) \sin x,$$

en vertu de (15), on trouve que $y_*''(x) = \eta'(x) \cos x - \zeta'(x) \sin x - \eta(x) \sin x - \zeta(x) \cos x$, ce qui donne

$$y_*''(x) + y_*(x) = \eta'(x) \cos x - \zeta'(x) \sin x = 2 \cos^2 x,\ \ x \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Les dérivées premières η' et ζ', des deux fonctions inconnues η et ζ, sont donc des solutions du système différentiel formé par les équations (15)-(16) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \eta'(x) \sin x + \zeta'(x) \cos x & = & 0 \\ \eta'(x) \cos x - \zeta'(x) \sin x & = & 2 \cos^2 x. \end{array} \right.$$

En additionnant la première ligne de ce système, préalablement multipliée par $\sin x$, à la deuxième qui a été multipliée par $\cos x$, il vient

$$\eta'(x) = 2 \cos^3 x = 2(1 - \sin^2 x) \cos x,$$

ce qui permet de prendre $\eta(x) = 2\left(\sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)$. De même, en soustrayant la deuxième ligne du système, multipliée par $\sin x$, à la première ligne, multipliée par $\cos x$, on obtient

$$\zeta'(x) = 2 \cos^2 x \sin x,$$

ce qui autorise à prendre $\zeta(x) = -\frac{2 \cos^3 x}{3}$. Ainsi, d'après (14),

$$y_*(x) = 2\left(1 - \frac{\sin^2 x}{3}\right) \sin^2 x - \frac{2 \cos^4 x}{3},$$

est solution particulière de (12). Finalement, on déduit de ceci et de (13) que l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (12) est :

$$S = \left\{x \mapsto \lambda \sin x + \mu \cos x + 2\left(1 - \frac{\sin^2 x}{3}\right) \sin^2 x - \frac{2 \cos^4 x}{3},\ \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}.$$

2.3.5 Principe de superposition

Il est facile de vérifier, de façon totalement analogue à ce qui a été fait pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, qu'il suffit d'additionner une solution particulière de l'équation différentielle

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x), \; x \in I,$$

à une solution particulière de l'équation différentielle

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = \tilde{f}(x), \; x \in I,$$

pour obtenir une solution de l'équation différentielle

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x) + \tilde{f}(x), \; x \in I.$$

Exemple 13. D'après l'Exemple 12, la fonction $y_*(x) = -\frac{\sin(2x)}{3}$ est solution de l'équation différentielle

$$y''(x) + y(x) = \sin(2x), \; x \in \mathbb{R},$$

et $\tilde{y}_*(x) = \frac{x}{2}\sin x$ est une solution de

$$y''(x) + y(x) = \cos x, \; x \in \mathbb{R}.$$

Par conséquent, $x \mapsto -y_*(x) = \frac{\sin(2x)}{3}$ est une solution de

$$y''(x) + y(x) = -\sin(2x), \; x \in \mathbb{R},$$

et $x \mapsto 2\tilde{y}_*(x) = x\sin x$ est solution de l'équation différentielle

$$y''(x) + y(x) = 2\cos x, \; x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, en vertu du principe de superposition, la fonction $x \mapsto -y_*(x) + 2\tilde{y}_*(x) = \frac{\sin(2x)}{3} + x\sin x$ est une solution de l'équation différentielle

$$y''(x) + y(x) = -\sin(2x) + 2\cos x, \; x \in \mathbb{R}.$$