Aix-Marseille Université
Institut Universitaire de Technologie
Département Réseaux et Télécommunications

Année 2021-2022
OSM 02
Compléments d'analyse

Calcul différentiel

Fonctions d'une ou plusieurs variables réelles

Table des matières

1 Rappels et compléments sur les fonctions numériques d'une variable réelle

1.1 Limite

1.1.1 Limite finie

Soit f une fonction numérique définie sur son domaine D.

Limite en un point. *Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Le point x_0 peut éventuellement ne pas appartenir à D, mais on suppose que tout intervalle ouvert $]a, b[$ contenant x_0 rencontre D. On dit alors que x_0 n'est pas isolé dans D.*

Définition 1. *On dit que le réel ℓ est la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 si pour tout réel $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi, il existe un réel $\alpha > 0$ (qui dépend généralement de ε) tel que*

$$\underbrace{x \in D \text{ et } |x - x_0| < \alpha}_{x \in D \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[} \Longrightarrow \underbrace{|f(x) - \ell| < \varepsilon}_{f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[}.$$

On note alors $\ell = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

On vérifie facilement à partir de cette définition, que la limite ℓ, lorsqu'elle existe, est unique.

Exemple 1. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la condition $|x - 2| < \alpha$, où α est un réel positif qui sera précisé ultérieurement, entraîne*

$$\left|x^2 - 4\right| = |x - 2||x + 2| \leq |x - 2|(|x - 2| + 4) < \alpha(\alpha + 4).$$

Ainsi, en choisissant $\alpha > 0$ assez petit de façon que $\alpha(\alpha + 4) = \alpha^2 + 4\alpha < \varepsilon$, ce qui est par exemple le cas dès que $\alpha < \min\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{5}}, \frac{\varepsilon}{5}\right)$, on voit que $\left|x^2 - 4\right| < \varepsilon$, ce qui démontre que $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.

Exercice 1. *Montrer que si f possède une limite (finie) en un point x_0, alors elle est bornée sur un voisinage de x_0, c'est-à-dire sur un intervalle ouvert de longueur non nulle qui contient x_0.*

.

Exercice 2. *Montrer que si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et que $f(x) \geq 0$ sur D, alors $\ell \geq 0$.*

Remarque 1. *Dans le résultat de l'Exercice 2, l'inégalité est large même si $f(x) > 0$ pour tout $x \in D$.*
Ainsi, par exemple, $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} > 0$ pour tout $x \in D = \mathbb{R}^*$, mais $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Exercice 3. *On suppose que $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in D$ et que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$. Montrer à partir du résultat de l'Exercice 2 que $\ell \leq \ell'$.*

Limite à droite, limite à gauche.

Définition 2. *On dit que ℓ est la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures si pour tout réel $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi, il existe un réel $\alpha > 0$ (qui dépend généralement de ε) tel que*

$$\underbrace{x \in D \text{ et } 0 < x - x_0 < \alpha}_{x \in D \cap]x_0, x_0 + \alpha[} \Longrightarrow \underbrace{|f(x) - \ell| < \varepsilon}_{f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[}.$$

Dans ce cas, le réel ℓ est appelé "limite à droite" de f en x_0 et on note $\ell = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x)$, ou de façon équivalente, $\ell = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

Lorsqu'elle existe, la limite à droite est unique.

Définition 3. *De façon analogue, on dit que ℓ est la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures si pour tout réel $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi, il existe un réel $\alpha > 0$ (qui dépend encore une fois de ε), tel que*

$$\underbrace{x \in D \text{ et } 0 < x_0 - x < \alpha}_{x \in D \cap]x_0-\alpha, x_0[} \Longrightarrow \underbrace{|f(x) - \ell| < \varepsilon}_{f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[}.$$

Le réel ℓ est appelé "limite à gauche" de f en x_0, et on note $\ell = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x)$ ou bien $\ell = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$.

Si elle existe, la limite à gauche est unique.

Exemple 2. *Soit $f(x) = \frac{|x|}{x}$ pour tout $x \in D = \mathbb{R}^*$. Il est clair que $x_0 = 0$ n'est pas un point isolé de $\mathbb{R}^*$. De plus,*

a) si $x > 0$ on a $|x| = x$ et donc $f(x) = 1$, ce qui donne $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

b) si $x < 0$ on a $|x| = -x$ et donc $f(x) = -1$, ce qui donne $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$.

Exercice 4. *Montrer que la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, définie sur $\mathbb{R}^*$, n'admet ni limite à gauche, ni limite à droite en $x = 0$.*

Remarque 2. *On voit facilement à partir des 3 définitions précédentes, que :*

$$f \text{ possède une limite en } x_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \textit{i)} & f \text{ possède une limite à gauche en } x_0 : \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell^- \\ \textit{ii)} & f \text{ possède une limite à droite en } x_0 : \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell^+ \\ \textit{iii)} & \ell^+ = \ell^-. \end{cases}$$

Limite à l'infini. *On suppose que f est définie sur $D =]a, +\infty[$, pour un certain $a \in \mathbb{R}$.*

Définition 4. *On dit que ℓ est la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ si pour tout réel $\varepsilon > 0$ arbitrairement choisi, il existe un réel M (qui dépend toujours a priori de ε) tel que*

$$\underbrace{x \in D \text{ et } x > M}_{x \in D \cap]M, +\infty[} \Longrightarrow \underbrace{|f(x) - \ell| < \varepsilon}_{f(x) \in]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[}.$$

On écrit dans ce cas $\ell = \lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Lorsqu'elle existe, cette limite est unique.

Exercice 5. *Vérifier en revenant à la définition précédente que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.*

Exercice 6. *Exprimer que $\ell = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ lorsque f est définie sur $]-\infty, b[$ pour un certain $b \in \mathbb{R}$.*

Quelques résultats importants sur les limites. *On commence par le théorème d'encadrement.*

Théorème 1. *On suppose que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in D$. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$, alors $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$.*

Exemple 3. *En divisant la double inégalité $x\cos x \leq \sin x \leq x$, valable pour tout $x \in [0, \pi]$, par $x \neq 0$, il vient immédiatement :*

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1, \ x \in]0, \pi].$$

Ensuite, comme $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ et que $\cos(-x) = \cos x$ pour tout $x \neq 0$, on en déduit que :

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1, \ x \in [-\pi, 0[\cup]0, \pi].$$

Or, $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$, donc le Théorème 1 (également connu sous le nom de "théorème du sandwich" ou "théorème du gendarme") donne $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

On poursuit par quelques propriétés algébriques simples.

Proposition 1. *Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell'$, alors on a :*
a) $\lim_{x\to x_0}[f(x) + \lambda g(x)] = \ell + \lambda\ell'$, $(\lambda \in \mathbb{R})$.
b) $\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)] = \ell\ell'$.
c) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{\ell'}$ si $\ell' \neq 0$.

Équivalent. *Dans le cas particulier où $\ell = \ell'$, le c) de la Proposition 1 donne $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$.*
On dit alors que f est équivalent à g en x_0, et on note $f \overset{x_0}{\sim} g$.
Ainsi, l'Exemple 3 a établi que $\sin x \overset{0}{\sim} x$.

Enfin, on a le résultat suivant, concernant la "composition" des limites.

Proposition 2. *Soient f définie sur D et g définie sur D', avec $f(D) \subset D'$. Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to \ell} g(x) = L$, alors $\lim_{x\to x_0}(g \circ f)(x) = L$.*

Exemple 4. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 - \cos x = 2\sin^2(\frac{x}{2})$ donc $\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$ lorsque $x \neq 0$. Comme $\lim_{x\to 0}\frac{x}{2} = 0$ et que $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1$ (puisque $\sin x \overset{0}{\sim} x$ d'après l'Exemple 3), la Proposition 2 donne $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = 1$. Ainsi, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 1$ d'après le b) de la Proposition 1, ce qui montre que $1 - \cos x \overset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.*

1.1.2 Limite infinie

Définition 5. *Soit f une fonction numérique de domaine D et x_0 un point non isolé de D.*
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 si pour tout réel $M > 0$ arbitrairement choisi, il existe un réel $\alpha > 0$ (qui dépend généralement de M) tel que

$$\underbrace{x \in D \text{ et } |x - x_0| < \alpha}_{x\in D\cap]x_0-\alpha, x_0+\alpha[} \Longrightarrow \underbrace{f(x) \geq M}_{f(x)\in[M,+\infty[}.$$

On note alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Cette limite, si elle existe, est forcément unique.

Exercice 7. *Vérifier à partir de la définition précédente, que* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Exercice 8. *Écrire la définition de* $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Remarque 3. *On vérifie facilement que :* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$. *Par contre, il convient de remarquer que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ *ne garantit pas que la fonction* $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ *tende vers l'infini lorsque* x *tend vers* x_0. *Ainsi par exemple, on a* $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{1}{x} = \pm\infty$ *bien que* $\lim_{x\to 0} x = 0$. *En fait, d'une façon générale, on a seulement l'implication suivante :*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{|f(x)|} = +\infty.$$

Définition 6. *De même que pour* $x_0 \in \mathbb{R}$, *on dira que* $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ *si pour tout réel* $M > 0$ *arbitrairement choisi, il existe un réel* $X > 0$ *(qui dépend généralement de* M*) tel que*

$$\underbrace{x \in D \text{ et } x > X}_{x\in D\cap]X,+\infty[} \Longrightarrow \underbrace{f(x) \geq M}_{f(x)\in[M,+\infty[} .$$

Exercice 9. *Vérifier à partir de la définition précédente que* $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

Exemple 5. *Limite d'un polynôme à l'infini.*
Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $n \geq 1$, $a_n \neq 0$. *Alors, pour tout* $x \neq 0$,

$$P(x) = a_n x^n \left[1 + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}}_{\varepsilon(x)} \right],$$

avec $\lim_{|x|\to +\infty} \varepsilon(x) = 0$. *Par suite,* $P \overset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n$ *donc*

$$\lim_{|x|\to +\infty} P(x) = \lim_{|x|\to +\infty} a_n x^n = \infty,$$

l'écriture $\lim_{|x|\to +\infty} a_n x^n = \infty$ *incluant l'une des situations suivantes :*

i) $a_n x^n$ *tend vers* $+\infty$, *ce qui est le cas lorsque* $a_n > 0$, *que* n *est pair et que* x *tend vers* $\pm\infty$, *ainsi que lorsque* $a_n > 0$, *que* n *est impair et que* x *tend vers* $+\infty$.

ii) $a_n x^n$ *tend vers* $-\infty$, *ce qui est le cas lorsque* $a_n < 0$, *que* n *est pair et que* x *tend vers* $\pm\infty$.

iii) $a_n x^n$ *n'a pas de limite à l'infini mais* $|a_n x^n|$ *tend vers* $+\infty$, *ce qui est le cas lorsque* n *est impair et que* x *tend vers* $\pm\infty$.

Exemple 6. *Limite d'une fraction rationnelle à l'infini.*
Soient $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$, *et* $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$, $m \in \mathbb{N}$, $b_m \neq 0$. *D'après ce qui a été vu dans l'Exemple 5,*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n [1 + \varepsilon(x)]}{b_m x^m [1 + \eta(x)]},$$

avec $\lim_{|x|\to +\infty} \varepsilon(x) = \lim_{|x|\to +\infty} \eta(x) = 0$.
Par suite :

$$\frac{P}{Q} \overset{\pm\infty}{\sim} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \text{ donc } \lim_{|x|\to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \\ \infty & \text{si } n > m. \end{cases}$$

Règles de calcul sur les limites infinies. *Ici, la notation* $\lim f$ *désigne aussi bien* $\lim_{x\to x_0} f(x)$ *que* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ *et l'écriture* $\lim f = \infty$ *signifie que* f *tend vers* $\pm\infty$ *sans que l'on se préoccupe du signe de la limite.*
Les principales règles de calcul sur les limites sont les suivantes :

(i)	$f(x) \leq g(x)$ *sur* D *et* $\lim f = +\infty$	$\Longrightarrow$	$\lim g = +\infty$
(ii)	$\lim f = +\infty$ *et* $\lim g = +\infty$	$\Longrightarrow$	$\lim(f+g) = +\infty$
(iii)	$\lim f = \infty$ *et* $\lim g = \infty$	$\Longrightarrow$	$\lim(fg) = \infty$
(iv)	$\lim f = \infty$ *et* $\lim g = l$	$\Longrightarrow$	$\lim(fg) = \infty$
(v)	$\lim f = \infty$ *et* $\lim g = l$	$\Longrightarrow$	$\lim \frac{f}{g} = \infty$
(vi)	$\lim f = l$ *et* $\lim g = \infty$	$\Longrightarrow$	$\lim \frac{f}{g} = 0$

Remarque 4. *Les opérations précédentes sur les limites infinies ne permettent pas de conclure dans les cas suivants :*

$$\begin{array}{lcc}
\lim f = +\infty \text{ et } \lim g = -\infty, & \lim(f+g) = ? & \textit{(indétermination } \infty - \infty\textit{)} \\
\lim f = \infty \text{ et } \lim g = 0, & \lim(fg) = ? & \textit{(indétermination } \infty \times 0\textit{)} \\
\lim f = \infty \text{ et } \lim g = \infty, & \lim \frac{f}{g} = ? & \textit{(indétermination } \frac{\infty}{\infty}\textit{)} \\
\lim f = 0 \text{ et } \lim g = 0, & \lim \frac{f}{g} = ? & \textit{(indétermination } \frac{0}{0}\textit{)}
\end{array}$$

Dans ces cas "indéterminés", la limite (si elle existe) est obtenue par un calcul explicite et non par l'application de théorèmes généraux. Ainsi dans l'Exemple 3 , c'est en encadrant la fonction $\frac{\sin x}{x}$ *sur* $]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$ *par* 1 *et* $\cos x$*, que l'indétermination "*$\frac{0}{0}$*" relative au calcul de* $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$*, a pu être levée.*

1.2 Continuité

1.2.1 Continuité en un point

Soit f *une fonction définie sur* $I \subset \mathbb{R}$ *et soit* $x_0 \in I$.

Définition 7. *On dit que* f *est continue en* x_0 *si* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

La fonction f *est donc continue en* x_0 *s'il existe une fonction* ε *vérifiant* $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ *et telle que*

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(x_0) + \varepsilon(x).$$

Exemple 7. *Étant donnés* $f(x) = x^2$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}$ *fixé, on a* $f(x) - f(x_0) = x^2 - x_0^2 = (x-x_0)(x+x_0)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*. Ensuite, comme* $\lim_{x\to x_0}(x - x_0) = 0$ *et que* $\lim_{x\to x_0}(x + x_0) = 2x_0$*, alors*

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \times (2x_0) = 0,$$

ce qui établit que f *est continue en* x_0.

Cas de discontinuité. *La fonction* f *peut ne pas être continue au point* x_0 *pour différentes raisons.*

a) f *n'est pas définie en* x_0.
C'est le cas par exemple de $f(x) = \frac{1}{x}$ *et* $x_0 = 0$.

b) f *est définie en* x_0 *et possède une limite* $\ell \neq f(x_0)$ *en ce point.*
Ainsi, la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

admet une limite en $x = 0$*, qui est* $\ell = \frac{\pi}{2} \neq f(0)$.

c) f ne possède pas de limite en x_0.
Deux cas peuvent alors se présenter :

i) f ne possède pas de limite à gauche ou à droite en x_0.
C'est le cas par exemple si $x_0 = 0$ et $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

ii) f possède une limite à gauche et une limite à droite en x_0, mais qui sont distinctes.
C'est le cas par exemple si $x_0 = n \in \mathbb{Z}$ et $f(x) = E(x)$, car

$$\underbrace{\lim_{x \overset{<}{\to} n} f(x)}_{n-1} \neq \underbrace{\lim_{x \overset{>}{\to} n} f(x)}_{f(n)=n}.$$

Par définition, on dira que f est continue à droite (resp. à gauche) en x_0 si :

$$\begin{cases} a) & f \text{ est définie en } x_0 \\ b) & \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0) \ \ \text{(resp. } \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)\text{)}. \end{cases}$$

On remarque ainsi que :

$$\boxed{f \text{ est continue en } x_0 \Longleftrightarrow f \text{ est continue à droite et à gauche en } x_0}$$

Prolongement par continuité. *Soit une fonction f non définie en un point x_0, mais qui possède une limite en x_0, c'est-à-dire qui possède une limite à droite et une limite à gauche en ce point, qui coïncident :*

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}.$$

La fonction f n'est pas continue en x_0 car elle n'est pas définie en ce point.
Mais la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0, \end{cases}$$

elle, est continue en x_0. De plus, g est coïncide avec f partout où la fonction f est définie. C'est pourquoi, on dit que "g réalise un prolongement de f par continuité".

Exemple 8. *On a déjà vu que la fonction $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)$, qui est définie sur $\mathbb{R}^*$, tend vers $\frac{\pi}{2}$ lorsque x tend vers 0. Par suite, la fonction*

$$g(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

prolonge f par continuité en 0. Par contre, pour ce qui est de la fonction $\varphi(x) = \frac{|x|}{x}$, qui est également définie sur $\mathbb{R}^*$, les égalités $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \varphi(x) = -1$ et $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} \varphi(x) = 1$ montrent qu'il n'est pas possible de la prolonger par continuité en 0.

Opérations sur les fonctions continues. *À l'aide des résultats obtenus au §1.1, on déduit facilement les règles suivantes.*

(i)	f et g sont continues en x_0	$\Longrightarrow$	$f+g$ et λf, $\lambda \in \mathbb{R}$, sont continues en x_0
(ii)	f et g sont continues en x_0	$\Longrightarrow$	fg est continue en x_0
(iii)	f et g sont continues en x_0, $g(x_0) \neq 0$	$\Longrightarrow$	$\frac{f}{g}$ est continue en x_0
(iv)	f est continue en x_0, g est continue en $f(x_0)$	$\Longrightarrow$	$g \circ f$ est continue en x_0

Exemple 9. *La fonction identité $x \mapsto x$ est continue en tout point x_0 de $\mathbb{R}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ est continue en x_0, en vertu de (ii). On voit ainsi à l'aide de (i) que tout polynôme est continu en x_0, et à partir de (iii) que toute fraction rationnelle est continue en tout point appartenant à son ensemble de définition.*

1.2.2 Continuité sur un intervalle

Soient a et b deux réels, avec $a < b$.

Définition 8. *Une fonction f est dite continue sur $[a, b]$ si :*

$$\begin{cases} a) & f \text{ est continue en tout point } x_0 \in]a, b[\\ b) & f \text{ est continue à droite en } x = a \text{ et à gauche en } x = b. \end{cases}$$

On désigne par $C^0([a, b])$ (ou parfois $C([a, b])$) l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$.

La définition d'une fonction continue sur $]a, b[$, $[a, b[$ ou $]a, b]$ se déduit aisément de ce qui précède.

Image d'un intervalle fermé par une fonction continue. *Soit $I \subset [a, b]$, un sous-ensemble de $[a, b]$. Si f est une fonction définie sur $[a, b]$, alors*

$$f(I) = \{f(x),\ x \in I\}$$

s'appelle l'image de I par f. L'image d'un intervalle fermé par une fonction continue est caractérisée par le théorème suivant.

Théorème 2. *Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ alors $f([a, b])$ est un intervalle fermé $[m, M]$.*

Ce théorème (admis) donne en fait 3 informations distinctes :

a) f est bornée sur $[a, b]$, ce qui signifie que :

i) f est majorée sur $[a, b]$: il existe $M_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M_0$ pour tout $x \in [a, b]$.
Le réel M_0 est un majorant de f sur $[a, b]$. Il n'est pas unique (car $M_0 + 1$ est également un majorant de f sur $[a, b]$). On montre que l'ensemble des majorants de f sur $[a, b]$ possède un plus petit élément, appelé borne supérieure de f sur $[a, b]$, et noté

$$M = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \text{ ou bien } M = \sup(f([a, b]).$$

Ainsi, par exemple, $\sup(\{1\}) = 1$ et $\sup([0, 1]) = \sup([0, 1[) = 1$.
On peut remarquer que $\sup_{x \in [a,b]} f(x)$ n'appartient pas forcément à $f([a, b])$.

ii) f est minorée sur $[a, b]$: il existe $m_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m_0$ pour tout $x \in [a, b]$.
Le réel m_0 est un minorant de f sur $[a, b]$. Il n'est pas unique (car $m_0 - 1$ est également un minorant de f sur $[a, b]$). On montre que l'ensemble des minorants de f sur $[a, b]$ possède un plus grand élément, appelé borne inférieure de f sur $[a, b]$, et noté

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \text{ ou bien } m = \inf(f([a, b]).$$

Ainsi, par exemple, $\inf(\{1\}) = 1$ et $\inf([0, 1]) = \inf(]0, 1]) = 0$.
On peut à nouveau remarquer que $\inf_{x \in [a,b]} f(x)$ n'appartient pas forcément à $f([a, b])$ non plus.

Ainsi, dans le cas particulier où $f(x) = x^2$ et $[a, b] = [-1, 1]$, par exemple, on a $m = 0$ et $M = 1$.

b) f atteint ses bornes, ce qui signifie qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ (pas forcément unique) tel que $f(\alpha) = m$, ainsi que $\beta \in [a, b]$ (pas forcément unique non plus) tel que $f(\beta) = M$.
Ainsi, en prenant à nouveau $a = -1$, $b = 1$ et $f(x) = x^2$, on a $f([a, b]) = [0, 1]$ et l'on remarque bien que $m = 0 = f(0)$ et $M = 1 = f(\pm 1)$.
Par contre, si l'intervalle est ouvert, $f(] - 1, 1[) = [0, 1[$, et l'on constate que $M = 1$ n'est égal à aucune image $f(x)$ pour $x \in] - 1, 1[$.

c) Toute valeur $\mu \in [m, M]$ est l'image d'au moins un $x \in [a, b]$.
On résume cette phrase en disant que "f est une surjection de $[a, b]$ sur $[m, M]$".

1.3 Dérivation

1.3.1 Généralités

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.

Définition 9. *La fonction f est dite dérivable en $x_0 \in I$ si $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = L \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, la limite L est appelée nombre dérivé de f en x_0, et est notée $f'(x_0)$.*

Pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, $T_f(x_0, x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est appelé taux d'accroissement (ou de variation) de f entre x_0 et x.

Exemple 10. *La fonction $\cos$ est dérivable en n'importe quel point $x_0 \in \mathbb{R}$.*
En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos x = \cos[(x-x_0)+x_0] = \cos x_0 \cos(x-x_0) - \sin x_0 \sin(x-x_0)$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{x_0\},\ T_{\cos}(x_0,x) = \frac{\cos x - \cos x_0}{x-x_0} = \cos x_0 \frac{\cos(x-x_0)-1}{x-x_0} - \sin x_0 \frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}.$$

Ensuite, comme $\sin y \overset{0}{\sim} y$ et $1-\cos y \overset{0}{\sim} \frac{y^2}{2}$, d'après les Exemples 3 et 4, on trouve que $\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x-x_0)}{x-x_0} = 1$ et $\lim_{x\to x_0} \frac{1-\cos(x-x_0)}{x-x_0} = 0$. Ainsi, $\lim_{x\to x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x-x_0} = -\sin x_0$, ce qui établit que la fonction cosinus est dérivable en x_0, de nombre dérivé $(-\sin x_0)$.

Autre formulation. *Si la fonction f est dérivable en x_0, on a par définition,*

$$\lim_{x\to x_0} \underbrace{\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)\right)}_{\varepsilon(x-x_0)} = 0.$$

Ainsi,

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x-x_0) \text{ avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0.$$

Réciproquement, il est clair que toute fonction f satisfaisant l'égalité précédente est dérivable en x_0, de nombre dérivé $f'(x_0)$. On a donc obtenu l'équivalence suivante :

$$\boxed{\left(\begin{array}{c} f \text{ est dérivable en } x_0 \\ \text{de nombre dérivé } f'(x_0) \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{il existe une fonction } x \mapsto \varepsilon(x-x_0) \text{ telle que :} \\ \bullet\ \forall x \in I,\ f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x-x_0) \\ \bullet\ \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0. \end{array}\right)}$$

Interprétation géométrique. *Soit $C = \{M = (x, f(x)),\ x \in I\}$ la courbe représentative de f. D'après l'équivalence précédente, toute fonction f dérivable en x_0, vérifie*

$$f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)\right] = (x-x_0)\varepsilon(x-x_0) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

On voit donc que la droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$

qui passe par le point $M_0 = (x_0, f(x_0)) \in C$, est "infiniment proche" de la courbe C au voisinage du point M_0. Cette droite est la tangente à C en M_0.

Lien avec la continuité. *Si f est dérivable en x_0, on déduit immédiatement de l'équivalence ci-dessus que* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$*, ce qui montre que f est continue en x_0. On a donc l'implication :*

$$\boxed{f \text{ est dérivable en } x_0 \Longrightarrow f \text{ est continue en } x_0}$$

Remarque 5. *Cependant, la réciproque (à l'implication précédente) est fausse. Autrement dit, il existe des fonctions continues en x_0 qui ne sont pas dérivables en ce point.*
Ainsi, la fonction $f(x) = |x|$, définie sur $\mathbb{R}$ est continue en $x_0 = 0$. Mais elle n'est pas dérivable en ce point car la taux de variation $T_f(0, x)$ n'a pas de limite en 0. En effet :

$$\lim_{x\to 0^-} \underbrace{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}_{\frac{-x}{x}} = -1 \neq \lim_{x\to 0^+} \underbrace{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}_{\frac{x}{x}} = 1.$$

Cas de non dérivabilité.

a) $T_f(x_0, x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *possède une limite à gauche et une limite à droite, qui sont distinctes. Dans ce cas, on pose*

i) $\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_g(x_0)$*, dérivée à gauche de f en x_0*

ii) $\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_d(x_0)$*, dérivée à droite de f en x_0.*

Géométriquement, cela signifie que la courbe C possède une demi-tangente à gauche (de pente $f'_g(x_0)$) et une demi-tangente à droite (de pente $f'_d(x_0)$) en M_0, ce qui se traduit le fait que M_0 est un "point anguleux" de C. Ainsi, dans l'exemple précédent, l'origine O est point anguleux de la courbe représentative de la fonction $f(x) = |x|$.

b) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$.
On dit alors (par abus de langage) que la courbe C possède une tangente verticale en M_0.
C'est le cas notamment de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

puisque l'on a

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

c) $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ *ne possède pas de limite en x_0.*
C'est justement le cas de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

puisque $\frac{f(x)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *n'a pas de limite en 0.*

1.3.2 Fonction dérivée

Définition 10. *Soit f une fonction numérique définie sur I et dérivable en tout point de I. Alors, l'application*

$$\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x), \end{array}$$

notée f', est appelée dérivée de f.

Dérivées successives. *Si la fonction f' est également dérivable sur I, on définit la dérivée seconde de f, notée f'', par $f''=(f')'$. Plus généralement, les dérivées successives (si elles existent) de f sont notées $f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$. On a bien sûr :*

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'.$$

L'ensemble des fonctions f dont la dérivée d'ordre n (encore appelée dérivée $n^{\text{ième}}$), $n \geq 1$, est définie en tout point de I, est noté $D^n(I)$.
Évidemment,

$$D^n(I) \subset D^{n-1}(I).$$

Si $f \in D^n(I)$, alors $f^{(n)}$ existe donc $f^{(n-1)}$ est continue, et plus généralement $f^{(p)}$ est continue pour tout $p \in \{0,1,\ldots,n-1\}$. Si $f^{(n)}$ est une fonction continue sur I, alors f est dite de classe C^n sur I, et on note

$$f \in C^n(I).$$

Si f est indéfiniment dérivable sur I, f est dite de classe C^∞ sur I, et on note

$$f \in C^\infty(I).$$

On voit que si $f \in C^n(I)$ alors $f^{(n-1)}$ est dérivable, donc continue sur I. Par suite, $f \in C^{n-1}(I)$ et l'on a l'inclusion suivante :

$$C^n(I) \subset C^{n-1}(I).$$

Remarque 6. *Si I n'est plus un intervalle fermé mais que $I=[a,b]$, $a<b$, par exemple, on rappelle qu'une fonction $f \in C^0([a,b])$ est, par définition, une fonction*
- *— continue en tout point $x \in]a,b[$*
- *— continue à gauche en $x=a$*
- *— continue à droite en $x=b$.*

Par analogie avec ce qui précède, on définit les ensembles $C^0([a,b[)$, $C^0(]a,b])$, puis $C^1([a,b])$, etc.

1.3.3 Opérations sur les fonctions dérivables

Opérations algébriques. *Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I, alors λf, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f+g$ et fg sont dérivables sur I, et*

$$\forall x \in I,\ (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x),\ (f+g)'(x) = f'(x)+g'(x),\ (fg)'(x) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

De plus, $\frac{f}{g}$ est dérivable en tout point $x \in I$ tel que $g(x) \neq 0$, et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Formule de Leibnitz. *Si f et g sont deux fonctions de classe C^n sur I, $n \geq 2$, on démontre (par récurrence sur n) que fg est également de classe C^n sur I, et on a de plus :*

$$\forall x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Composition. *Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ dérivable en x_0 et,*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \times f'(x_0).$$

Exemple 11. *La fonction $x \overset{h}{\mapsto} \cos(x^2)$ s'écrit $h(x) = (g \circ f)(x)$ avec $g(y) = \cos y$ et $f(x) = x^2$. Or, f et g sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}$, avec $f'(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $g'(y) = -\sin y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Par suite, on a $h'(x) = -\sin(x^2) \times (2x) = -2x\sin(x^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

Dérivée de la réciproque. *Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I. Si f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(y_0)]}.$$

Démonstration. *Soit$y_0 = f(x_0)$. Pour tout $x \in I$, on a, en posant $y = f(x)$,*

$$T_{f^{-1}}(y_0, y) = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{T_f(x_0, x)}.$$

Comme f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) \neq 0$, on voit que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{T_f(x_0, x)} = \frac{1}{f'(x_0)},$$

ce qui montre que f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et que $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. □

Exemple 12. *La réciproque de la fonction $f(x) = x^2$ restreinte à $\mathbb{R}_+$ est la fonction racine carrée. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en entier, et $f'(x) = 2x$ est non nulle si et seulement si $x \neq 0$. Par suite, f^{-1} est dérivable en tout point $y = x^2 > 0$, et pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$.*

Dérivée des fonctions usuelles. *A l'aide des résultats obtenus précédemment, on obtient l'expression de la dérivée des fonctions usuelles suivantes :*

$(x^\alpha)'$	$=$	$\alpha x^{\alpha-1},\ \alpha \in \mathbb{R}$	$(\ln\|x\|)'$	$=$	$\frac{1}{x}$	$(a^x)'$	$=$	$(\ln a)a^x,\ a > 0$
$\sin' x$	$=$	$\cos x$	$\cos' x$	$=$	$-\sin x$	$\tan' x$	$=$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$(\mathrm{e}^x)'$	$=$	e^x	$\cosh' x$	$=$	$\sinh x$	$\sinh' x$	$=$	$\cosh x$
$\arcsin' x$	$=$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos' x$	$=$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arctan' x$	$=$	$\frac{1}{1+x^2}$

1.3.4 Accroissements finis

Le théorème de Rolle. *Ce résultat énonce que si une fonction dérivable prend la même valeur en deux points distincts, alors sa dérivée s'annule au moins une fois entre ces deux points.*

Théorème 3. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et soit f une fonction (à valeurs réelles) continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe (au moins) un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Démonstration. *Si f est constante sur $[a, b]$, alors $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$ et n'importe quel réel $c \in]a, b[$ convient. Examinons maintenant le cas où f n'est pas constante sur $[a, b]$. La fonction f est continue sur $[a, b]$, donc elle est bornée et elle atteint ses bornes d'après le Théorème 2. En fait, on va voir que f atteint l'une de ses bornes au moins ($m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$ ou $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$) en un point $c \in]a, b[$. En effet, si $f(x) > m$ pour tout $x \in]a, b[$ alors $f(a) = f(b) = m$, et comme f n'est pas constante sur $[a, b]$, il existe nécessairement $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Dans ce cas, on voit que*

$$f'(c) = f'_d(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - M}{h} \leq 0,$$

et

$$f'(c) = f'_g(c) \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - M}{h} \geq 0,$$

ce qui montre que $f'(c) = 0$. □

Remarque 7. *Le théorème de Rolle ne s'applique pas aux fonctions à valeurs complexes. Ainsi, $f(x) = e^{ix}$ vérifie $f(0) = f(2\pi) = 1$, mais $f'(x) = ie^{ix} \neq 0$ pour tout $x \in]0, 2\pi[$.*

Le théorème des accroissements finis. *Ce résultat est une généralisation du théorème de Rolle.*

Théorème 4. *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, $a < b$, et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe (au moins) un réel $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c). \tag{1}$$

Exercice 10. *Démontrer le Théorème 4 en appliquant le théorème de Rolle à la fonction auxiliaire*

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),\ \ x \in [a, b].$$

Application au sens de variation des fonctions.

Proposition 3. *Les hypothèses sont celles du théorème des accroissements finis.*

a) Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors la fonction f est constante sur $[a, b]$.

b) Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors la fonction f est croissante sur $[a, b]$.

Démonstration. a) Soit $x \in]a, b]$. La fonction f est continue sur $[a, x]$ et elle est dérivable sur $]a, x[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, x[$ tel que

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = 0.$$

Par suite, $f(x) = f(a)$ pour tout $x \in]a, b]$, ce qui montre bien que f est constante sur $[a, b]$.
b) Soient $(x, x') \in]a, b[^2$ tels que $x < x'$. Comme la fonction f est continue sur $[x, x']$ et dérivable sur $]x, x'[$, le théorème des accroissements finis s'applique : il existe $c \in]x, x'[$ tel que

$$f(x') - f(x) = f'(c)(x' - x).$$

Par hypothèse, on a $f'(c) \geq 0$ et donc $T_f(x, x') \geq 0$. □

Plus généralement, si f est dérivable sur un intervalle I, on a les équivalences suivantes :

$\forall x \in I,\ f'(x) = 0$	$\iff$	$\exists C \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = C$
$\forall x \in I,\ f'(x) > 0$	$\iff$	f *est strictement croissante sur* I
$\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$	$\iff$	f *est croissante sur* I
$\forall x \in I,\ f'(x) < 0$	$\iff$	f *est strictement décroissante sur* I
$\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$	$\iff$	f *est décroissante sur* I

Exercice 11. *Le but de cet exercice est de montrer que deux fonctions f et g, continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$, et vérifiant $|f'(x)| \leq g'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, satisfont l'inégalité des accroissements finis suivante :*

$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a). \tag{2}$$

Pour cela, on demande de :

a) Vérifier que $h^{\pm}(x) = g(x) - g(a) \pm (f(x) - f(a))$ est une fonction croissante sur $[a, b]$.

b) Évaluer $h^{\pm}(a)$ et $h^{\pm}(b)$ puis conclure à partir de a).

Exercice 12. *Une application du théorème des accroissements finis (Théorème 4) et de l'inégalité des accroissements finis* (2) *de l'Exercice 11.*

a) Montrer en appliquant (1) à la fonction $\sin$ *entre* 0 *et* $x \in \mathbb{R}_+$*, que*

$$|\sin x| \leq x, \ x \in \mathbb{R}_+.$$

b) En déduire (à l'aide de l'inégalité des accroissements finis (2) appliquée à $f(x) = \cos x$ *et* $g(x) = \frac{x^2}{2}$*) que*

$$|\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2}, \ x \in \mathbb{R}.$$

c) Déduire ensuite de b) (en appliquant l'inégalité (2) à $f(x) = \sin x - x$ *et* $g(x) = \frac{x^3}{6}$*) que*

$$|\sin x - x| \leq \frac{|x|^3}{6}, \ x \in \mathbb{R}.$$

1.3.5 extrema locaux

Définition 11. *Soit* f *une fonction définie sur un intervalle* I*.*
On dit que le point $x_0 \in I$ *est un maximum local de* f *s'il existe un réel* $\alpha > 0$*, tel que*

$$\forall x \in I, \ x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\Longrightarrow f(x) \geq f(x_0).$$

Autrement dit, f *admet un maximum local en* x_0 *si l'inégalité* $f(x) \geq f(x_0)$ *est vérifiée pour tout* x *appartenant à un voisinage de* x_0*.*
De même, on dit le point $x_0 \in I$ *est un minimum local de* f*, s'il existe un réel* $\alpha > 0$ *tel que*

$$\forall x \in I, \ x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\Longrightarrow f(x) \leq f(x_0).$$

Un extremum local de f *est un maximum ou un minimum local de* f*.*

Recherche des extrema locaux. *On suppose désormais que* f *est dérivable sur* I*.*

Proposition 4. *Les extrema locaux de* f *sont à rechercher parmi les zéros de* f'*. Autrement dit, on a l'implication suivante :*

$$x_0 \text{ est un extremum local de } f \Longrightarrow f'(x_0) = 0.$$

Démonstration. Examinons le cas où x_0 *est un minimum local de* f*, celui d'un maximum local se traitant de façon totalement similaire. Pour démontrer que la dérivée de* f *s'annule en* x_0*, on raisonne par l'absurde en supposant que* $f'(x_0) \neq 0$*. Ensuite, la fonction* f *étant dérivable en* x_0*, il existe un réel* $\alpha_0 > 0$ *et une fonction* $x \mapsto \varepsilon(x - x_0)$*, définie sur* $]x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0[$ *et vérifiant* $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$*, tels que*

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)[f'(x_0) + \varepsilon(x - x_0)], \ x \in I \cap]x_0 - \alpha_0, x_0 + \alpha_0[. \tag{3}$$

Par ailleurs, x_0 *est un minimum local de* f*, donc il existe un réel* $\alpha_1 > 0$ *pour lequel on a :*

$$\forall x \in I \cap]x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1[, \ f(x) \geq f(x_0).$$

Enfin, comme $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$*, alors il existe* $\alpha_2 > 0$*, tel que*

$$\forall x \in I \cap]x_0 - \alpha_2, x_0 + \alpha_2[, \ |\varepsilon(x - x_0)| \leq \frac{|f'(x_0)|}{2}.$$

Ici, il convient de remarquer que cette inégalité n'est vraie qu'en présence de l'hypothèse $f'(x_0) \neq 0$ *(qui implique évidemment que* $|f'(x_0)| > 0$*). Par suite, on voit que*

$$\forall x \in I \cap]x_0 - \alpha_2, x_0 + \alpha_2[, \ \left|f'(x_0) + \varepsilon(x - x_0)\right| \geq \left|f'(x_0)\right| - \varepsilon(x - x_0) \geq \frac{|f'(x_0)|}{2}.$$

Ainsi, en posant $\alpha = \min(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) > 0$, on déduit facilement de ce qui précède que la fonction $x \mapsto f'(x_0) + \varepsilon(x - x_0)$ ne s'annule pas sur $I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, ce qui signifie que $x \mapsto (x - x_0)[f'(x_0) + \varepsilon(x - x_0)]$ change nécessairement de signe sur $I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$. Au vu de (3), ceci est en contradiction avec l'inégalité

$$f(x) \geq f(x_0), \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[.$$

Par conséquent, l'hypothèse $f'(x_0) \neq 0$ est fausse, ce qui signifie que $f'(x_0) = 0$. □

Remarque 8. *a) En général, la condition $f'(x_0) = 0$ ne suffit pas à établir que x_0 est un extremum local de f. En effet, la fonction $f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en entier et sa dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule en $x_0 = 0$, bien que x_0 ne soit pas un extremum local de f (puisque le signe de $f(x) - f(x_0)$ est celui de x). Ce phénomène provient en fait de ce que la dérivée f' ne change pas de signe au voisinage de x_0.*

b) De plus, il faut bien prendre garde au fait que la Proposition 4 ne s'applique pas lorsque f n'est pas dérivable en x_0. Ainsi par exemple, $f(x) = |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée partout non nulle, et pourtant elle admet un minimum local en $x_0 = 0$.

c) Enfin, les extrémités de I peuvent être des extrema locaux de f sur I sans que la dérivée de f ne s'annule en ce point. C'est notamment le cas pour $f(x) = x$ et $I = [0, 1]$. La dérivée de f ne s'annule pas sur I, mais 0 et 1 sont respectivement minimum et maximum de f sur I.

Conclusion partielle. *Les extrema locaux d'une fonction f définie sur I sont à rechercher parmi :*

a) Les extrémités de I.

b) Les points en lesquels f n'est pas dérivable.

c) Les points en lesquels f' s'annule, qui sont appelés points stationnaires (ou critiques) de f.

Exercice 13. *Déterminer les extrema locaux de la fonction f définie sur $[-1, 2]$ par $f(x) = x|1 - x|$.*

1.3.6 Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2

D'après le théorème des accroissements finis (Théorème 4), il est possible d'associer à toute fonction f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, c'est-à-dire à tout $f \in C^0([a, b]) \cap D^1(]a, b[)$, un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(c).$$

On va voir que ce résultat peut être amélioré en augmentant la régularité de f.

Égalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2. *Afin d'établir cette égalité, on commence par démontrer les résultats techniques suivants.*

Exercice 14. *Soit h une fonction continûment dérivable sur $[a, b]$ et deux fois dérivable sur $]a, b[$, autrement dit $h \in C^1([a, b]) \cap D^2(]a, b[)$. On suppose que $h(a) = h(b)$ et $h'(a) = 0$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $h''(c) = 0$.*

Exercice 15. *Soit $g \in C^1([a, b]) \cap D^2(]a, b[)$ telle que $g'(a) = 0$. Démontrer, en appliquant le résultat de l'Exercice 14 à la fonction auxiliaire*

$$h(x) = g(x) - \frac{g(b) - g(a)}{(b - a)^2}(x - a)^2, \ x \in [a, b],$$

qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$g(b) = g(a) + \frac{(b - a)^2}{2} g''(c). \tag{4}$$

On remarque que l'égalité (4) *se réécrit sous la forme équivalente suivante*

$$g(b) = g(a) + (b-a)g'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}g''(c).$$

Si sa démonstration dans l'Exercice 15, repose sur l'hypothèse que $g'(a) = 0$, on va voir que cette condition peut être éliminée.

Théorème 5. *Soit $f \in C^1([a,b]) \cap D^2(]a,b[)$. Alors, il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c). \tag{5}$$

Exercice 16. *Démontrer la formule* (5) *(dite "de Taylor-Lagrange à l'ordre 2"), en appliquant le résultat de l'Exercice 15 à la fonction auxiliaire*

$$g(x) = f(x) - (x-a)f'(a),\ x \in [a,b].$$

Exemple 13. *Les réels a, b et la fonction f étant comme dans l'énoncé du Théorème 5, on pose $h = b - a$. Ensuite, comme $c \in]a,b[=]a, a+h[$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $c = a + \theta h$, de sorte que la formule* (5) *se réécrit :*

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a+\theta h). \tag{6}$$

Supposons qu'il existe $M \geq 0$ tel que $|f''(x)| \leq M$ pour tout $x \in]a, a+h[$. Dans ce cas, on déduit de (6) *que*

$$\left|f(a+h) - (f(a) + hf'(a))\right| \leq \frac{Mh^2}{2}.$$

Cette inégalité (de Taylor-Lagrange à l'ordre 2), montre que l'erreur commise en approximant $f(a+h)$ par le polynôme de Lagrange $f(a) + hf'(a)$ (qui est l'ordonnée du point d'abscisse $a + h$, situé sur la tangente à f en $(a, f(a))$) est majorée par $\frac{Mh^2}{2}$.
Application : $f = \sin$ et $a = 0$. La fonction $\sin$ étant indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, elle satisfait bien les conditions du Théorème 5 sur $[0,h]$, pour tout $h > 0$. Ensuite, comme $\sin 0 = 0$, $\sin' 0 = \cos 0 = 1$ et que $\sin'' = -\sin$ avec $|\sin x| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on obtient que

$$|\sin h - h| \leq \frac{h^2}{2},\ h > 0.$$

En divisant cette inégalité par $h > 0$, il vient $\left|\frac{\sin h}{h} - 1\right| \leq \frac{h}{2}$, soit finalement

$$\left|\frac{\sin h}{h} - 1\right| \leq \frac{|h|}{2},\ h \in \mathbb{R}^*,$$

par parité de la fonction $h \mapsto \frac{\sin h}{h}$.
En faisant tendre h vers 0, on obtient ainsi que $\lim_{h\to 0}\left|\frac{\sin h}{h} - 1\right| = 0$ et donc que

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1.$$

Remarque 9. *La formule de Taylor-Lagrange se généralise à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ dès que $f \in C^n([a,b]) \cap D^{n+1}(]a,b[)$. Dans ce cas, on prouve (en raisonnant par récurrence sur n) l'existence de $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Exercice 17. *Montrer que*

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{\frac{h^2}{2}} = 1,$$

à partir de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 de la fonction $\cos$ en 0.

Application à la recherche des extrema locaux.

Proposition 5. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et soit $f \in C^2(]a, b[)$. Soit $x_0 \in]a, b[$ un point stationnaire de f (c'est-à-dire $f'(x_0) = 0$). Alors, si*

i) $f''(x_0) > 0$, la fonction f admet un minimum local en x_0.

ii) $f''(x_0) < 0$, la fonction f admet un maximum local en x_0.

Démonstration. Supposons que $f''(x_0) > 0$, le cas $f'(x_0) < 0$ se traitant de façon analogue. Soit $x \in]a, b[$. D'après le Théorème 4, il existe $c_x \in]x_0, x[$ tel que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(c_x),$$

ce qui, en tenant compte du fait que $f'(x_0) = 0$, donne :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(c_x). \tag{7}$$

Ensuite, comme $f''(x_0) > 0$ et que f'' est continue en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$t \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\Longrightarrow \left| f''(t) - f''(x_0) \right| < \frac{f''(x_0)}{2}.$$

Par suite, comme $f''(t) = f''(x_0) - (f''(t) - f''(x_0)) \geq f''(x_0) - |f''(t) - f''(x_0)|$, on obtient

$$f''(t) \geq f''(x_0) - \frac{f''(x_0)}{2} \geq \frac{f''(x_0)}{2},\ t \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[.$$

Ainsi, pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, on voit que $c_x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ puisque $c_x \in]x_0, x[$, de sorte que

$$f''(c_x) \geq \frac{f''(x_0)}{2}.$$

Ceci combiné à (7), entraîne

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{(x - x_0)^2}{4} f''(x_0) \geq 0,\ x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,$$

ce qui établit que f admet un minimum local en x_0. □

Exercice 18. *Déterminer les extrema locaux de la fonction $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur l'intervalle $[-2, 2]$.*

1.4 Corrigé des exercices 1 à 18

Corrigé de l'Exercice 1. *Si f possède une limite ℓ en x_0 alors il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ on a $|f(x) - \ell| < 1$ (c'est juste la définition de ℓ dans le cas particulier où $\epsilon = 1$) c'est-à-dire tel que $f(x) \in]\ell - 1, \ell + 1[$. Cela implique*

$$|f(x)| \leq |\ell| + 1,\ x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[,$$

ce qui signifie que f est bornée par $|\ell| + 1$ sur le voisinage $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ de x_0.

Corrigé de l'Exercice 2. *L'hypothèse $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ permet d'écrire pour tout $\epsilon > 0$ qu'il existe $\alpha_\epsilon > 0$ tel que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ dès que $x \in D \cap]x_0 - \alpha_\epsilon, x_0 + \alpha_\epsilon[$. Ensuite, en utilisant le fait que $\ell = f(x) + \ell - f(x) \geq f(x) - |\ell - f(x)| \geq 0 - |\ell - f(x)|$ pour tout $x \in D$, puisque $f(x) \geq 0$, cela entraîne (en prenant $x \in D \cap]x_0 - \alpha_\epsilon, x_0 + \alpha_\epsilon[$ dans l'inégalité précédente) que l'on a $\ell > -\epsilon$ pour tout $\epsilon > 0$. En faisant tendre ϵ vers zéro, ceci implique que $\ell \geq 0$.*

Corrigé de l'Exercice 3. *Il suffit de poser $h(x) = g(x) - f(x)$ et d'appliquer le résultat de l'Exercice 2 à la fonction h. En effet, on a $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in D$ et $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) - \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell' - \ell$. Par suite, $\ell' - \ell \geq 0$ d'après l'Exercice 2.*

Corrigé de l'Exercice 4. *Si la fonction $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, définie sur $\mathbb{R}^*$, admettait une limite $\ell \in \mathbb{R}$ à droite en 0, alors il existerait $\alpha > 0$ tel que*

$$|f(x) - \ell| < \frac{1}{2},\ x \in]0, \alpha[. \tag{8}$$

Ensuite, comme $\ell = f(x) + \ell - f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a forcément

$$f(x) - |f(x) - \ell| \leq \ell \leq f(x) + |f(x) - \ell|,$$

et donc

$$f(x) - \frac{1}{2} < \ell < f(x) + \frac{1}{2},\ x \in]0, \alpha[, \tag{9}$$

en vertu de (8). Maintenant, en prenant $x = \frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$ avec $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que $x < \alpha$ (il suffit pour cela de choisir un entier natural n strictement plus grand que la partie entière de $\frac{1}{2\pi\alpha}$), on a $f(x) = \sin\left(\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, et donc

$$\ell > \frac{1}{2} \tag{10}$$

d'après l'inégalité gauche de (9). Par contre, si on prend $x = \frac{1}{\left(2n+\frac{3}{2}\right)\pi}$ alors $f(x) = \sin\left(\left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$ et l'on a $\ell < -\frac{1}{2}$ par l'inégalité droite de (9), ce qui est en contradiction avec (10). Par suite, l'hypothèse que f admet une limite à droite est fausse.
Enfin, la fonction f étant impaire, elle n'a pas de limite à gauche en 0 non plus (car si tel était le cas, elle aurait une limite à droite en ce point, égale à l'opposé de la limite à gauche, ce qui est impossible).

Corrigé de l'Exercice 5. *Etant donné $\epsilon > 0$, on voit pour tout $x > \frac{1}{\epsilon}$ que l'on a*

$$\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{x} < \epsilon,$$

ce qui montre bien que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Corrigé de l'Exercice 6. *L'égalité $\ell = \lim_{x\to-\infty} f(x)$ lorsque f est définie sur $]-\infty, b[$ pour un certain $b \in \mathbb{R}$, signifie qu'à tout $\epsilon > 0$ on peut associer un réel $M_\epsilon < b$ (dépendant a priori de ϵ) tel que*

$$\forall x < M_\epsilon,\ |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Corrigé de l'Exercice 7. *À tout $M > 0$ on peut associer $\alpha_M = \frac{1}{\sqrt{M}} > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a*

$$|x - 0| < \alpha_M \Longrightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\alpha_M^2} = M,$$

ce qui démontre que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Corrigé de l'Exercice 8. *L'égalité $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ se traduit par le fait que*

$$\forall M > 0,\ \exists \alpha_M > 0,\ |x - x_0| < \alpha_M \Longrightarrow f(x) < -M.$$

Corrigé de l'Exercice 9. *Étant donné* $M > 0$*, on voit que pour tout* $x > M^2$ *on a* $\sqrt{x} > \sqrt{M^2} = M$*, ce qui établit que* $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$*.*

Corrigé de l'Exercice 10. *Les fonctions* f *et* $x \mapsto \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ *sont à la fois continues sur* $[a,b]$ *et dérivables sur* $]a,b[$*, donc il en est de même pour* g*. Ensuite, on a* $g(a) = f(a)$ *et* $g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(a)$*, ce qui montre que* $g(a) = g(b)$*. D'après le théorème de Rolle, il existe donc* $c \in]a,b[$ *tel que* $g'(c) = 0$*. Comme*

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ x \in [a,b],$$

cela donne $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$*, ce qui est bien le résultat cherché.*

Corrigé de l'Exercice 11.

a) *Comme* f *et* g *sont dérivables sur* $]a,b[$ *alors* $h^{\pm}$ *est dérivable sur* $]a,b[$ *également, et l ?on a :*

$$(h^{\pm})'(x) = g'(x) \pm f'(x),\ x \in]a,b[.$$

Par suite, on a $(h^{\pm})'(x) \geq g'(x) - |f'(x)| \geq 0$ *pour tout* $x \in]a,b[$*, en vertu de l'hypothèse faite sur les dérivées de* f *et* g*, ce qui établit que la fonction* $h^{\pm}$ *est croissante sur* $[a,b]$*.*

b) *Par un calcul simple, on voit que* $h^{\pm}(a) = 0$ *et* $h^{\pm}(b) = g(b) - g(a) \pm (f(b) - f(a))$*. Or, la fonction* $h^{\pm}$ *étant croissante sur* $]a,b[$ *d'après a), on a forcément* $h^{\pm}(b) \geq h^{\pm}(a)$*, ce qui entraîne*

$$g(b) - g(a) \pm (f(b) - f(a)) \geq 0,$$

et donc $g(b) - g(a) \geq \mp(f(b) - f(a))$*, qui n'est autre que l'inégalité des accroissements finis* $g(b) - g(a) \geq |f(b) - f(a)|$*.*

Corrigé de l'Exercice 12.

a) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$*, la fonction* $f(t) = \sin t$ *est continue sur* $[0,x]$ *et dérivable sur* $]0,x[$ *donc il existe* $c_x \in]0,x[$ *tel que* $f(x) - f(0) = (x-0)f'(c_x)$ *en vertu du théorème des accroissements finis, ce qui se réécrit*

$$\sin x - \sin 0 = x \cos c_x.$$

En tenant compte du fait que $\sin 0 = 0$ *et que* $|\cos c_x| \leq 1$*, cela donne*

$$|\sin x| = |x \cos c_x| = x|\cos c_x| \leq x,\ x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Maintenant, l'inégalité précédente étant évidemment valable pour $x = 0$*, elle est donc vraie pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$*.*

b) *Supposons pour commencer que* $x \in \mathbb{R}_+^*$*. Les fonctions* $f(t) = \cos t$ *et* $g(t) = \frac{t^2}{2}$ *sont continues sur* $[0,x]$ *et dérivables sur* $]0,x[$*, et on a* $|f'(t)| = |-\sin t| = |\sin t|$ *et* $g'(t) = t$ *pour tout* $t \in]0,x[$*. Par suite, on a* $|f'(t)| \leq g'(t)$ *pour tout* $t \in]0,x[$ *d'après le a), ce qui entraîne* $|f(x) - f(0)| \leq g(x) - g(0)$ *par application de l'inégalité des accroissements finis (2), c'est-à-dire* $|\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2}$*. Évidemment, cette inégalité est vérifiée si* $x = 0$ *également donc elle est vraie pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$*. Finalement, si* $x \in \mathbb{R}_-$*, il vient en appliquant l'inégalité précédente à* $-x \in \mathbb{R}_+$*, que*

$$|\cos(-x) - 1| \leq \frac{(-x)^2}{2},$$

c'est-à-dire, $|\cos x - 1| \leq \frac{x^2}{2}$ *grâce à la parité de la fonction* $\cos$*. Par conséquent, le résultat est vrai pour* $x \in \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}_- = \mathbb{R}$*.*

c) *Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Les fonctions $f(t) = \sin t - t$ et $g(t) = \frac{t^3}{6}$ sont continues sur $[0, x]$ et dérivables sur $]0, x[$. De plus, on a $f'(t) = \cos t - 1$ et $g'(t) = \frac{t^2}{2}$ pour tout $t \in]0, x[$, ce qui donne $|f'(t)| \leq g'(t)$ d'après le b). Ainsi $|f(x) - f(0)| \leq g(x) - g(0)$ par l'inégalité* (2)*, ce qui s'écrit $|\sin x - x| \leq \frac{x^3}{6} \leq \frac{|x|^3}{6}$ vu que $f(0) = g(0) = 0$. Cette inégalité étant trivialement vérifiée si $x = 0$, elle est donc valable pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On voit facilement qu'elle s'étend à $\mathbb{R}_-$ grâce à l'imparité des fonctions f et g.*

Corrigé de l'Exercice 13. *Voir la correction du TD.*

Corrigé de l'Exercice 14. *Comme $h \in C^1([a, b]) \cap D^2(]a, b[)$ alors on a forcément $h \in C^0([a, b]) \cap D^1(]a, b[)$. De plus, comme $h(a) = h(b)$, le théorème de Rolle nous fournit un réel $d \in]a, b[$ tel que $h'(d) = 0$. Ensuite, l'hypothèse $h \in C^1([a, b]) \cap D^2(]a, b[)$ garantissant que $h' \in C^0([a, b]) \cap D^1(]a, b[)$, et donc que $h' \in C^0([a, d]) \cap D^1(]a, d[)$ puisque l'on a $a < d < b$, la double égalité $h'(a) = h'(d) = 0$ permet d'appliquer le théorème de Rolle à h' sur $[a, d]$: il existe $c \in]a, d[\subset]a, b[$ tel que $(h')'(c) = h''(c) = 0$.*

Corrigé de l'Exercice 15. *Comme les fonctions g et $x \mapsto (x - a)^2$ appartiennent à $C^1([a, b]) \cap D^2(]a, b[)$, alors il en est de même pour h. De plus, on a facilement*

$$h'(x) = g'(x) - 2\frac{g(b) - g(a)}{(b - a)^2}(x - a), \ x \in [a, b],$$

et donc que $h'(a) = g'(a) = 0$, par hypothèse. Comme $h(a) = h(b) = g(a)$, le résultat de l'Exercice 14 fournit donc $c \in]a, b[$ tel que

$$h''(c) = 0.$$

Or, pour tout $x \in]a, b[$, on a $h''(x) = g''(x) - 2\frac{g(b)-g(a)}{(b-a)^2}$, donc $g''(c) - 2\frac{g(b)-g(a)}{(b-a)^2} = 0$, soit

$$\frac{g(b) - g(a)}{(b - a)^2} = \frac{g''(c)}{2}.$$

En remplaçant enfin $\frac{g(b)-g(a)}{(b-a)^2}$ par $\frac{g''(c)}{2}$ dans l'expression de h, il vient

$$h(x) = g(x) - \frac{g''(c)}{2}(x - a)^2, \ x \in [a, b].$$

En prenant $x = b$ dans cette expression et en utilisant une nouvelle fois que $h(b) = g(a)$, on obtient direcrtement (4).

Corrigé de l'Exercice 16. *Comme $f \in C^1([a, b]) \cap D^2(]a, b[)$, il en est de même pour*

$$g(x) = f(x) - (x - a)f'(a), \ x \in [a, b].$$

De plus, comme $g'(x) = f'(x) - f'(a)$ pour tout $x \in [a, b]$, alors on a bien $g'(a) = 0$ et le résultat de l'Exercice 15 permet de trouver $c \in]a, b[$ tel que $g(b) = g(a) + \frac{(b-a)^2}{2}g''(c)$, c'est-à-dire, en utilisant le fait que $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - (b - a)f'(a)$ et que $g''(c) = f''(c)$, que $f(b) - (b - a)f'(a) = f(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c)$, ce qui est équivalent à la formule (5) *de Taylor-Lagrange à l'ordre 2.*

Corrigé de l'Exercice 17. *Remarquons d'abord pour tout réel $h \neq 0$, que la fonction $\cos$ est bien de classe $C^2([0,h]) \cap D^3(]0,h[)$, de sorte que l'on peut lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3 : il existe $c_h \in]0,h[$ tel que*

$$\cos h = \cos 0 + (h-0)\cos' 0 + \frac{(h-0)^2}{2}\cos'' 0 + \frac{(h-0)^3}{6}\cos^{(3)} c_h,$$

ce qui donne toutes simplifications faites, que

$$\cos h = 1 + (h-0)\sin 0 + \frac{h^2}{2}(-\cos 0) + \frac{h^3}{6}(-\sin c_h) = 1 - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{6}\sin c_h.$$

Par suite, on a

$$\frac{1-\cos h}{\frac{h^2}{2}} = 1 + \frac{h}{3}\sin c_h,\ h \neq 0,$$

et comme $\lim_{h\to 0} \frac{h}{3}\sin c_h = 0$ puisque $|\sin c_h| \leq 1$, le résultat s'ensuit immédiatement de ceci en faisant tendre h vers 0 dans la ligne précédente.

Corrigé de l'Exercice 18. *Voir la correction du TD.*

2 Fonctions numériques de deux variables réelles

2.1 Généralités

Une fonction de 2 variables est une application d'un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y). \end{array}$$

$\mathcal{D}$ s'appelle l'ensemble de définition de f.

Exemple 14. *Le domaine de la fonction $f(x,y) = \arcsin(x+y)$ est*

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq x+y \leq 1\}.$$

Il est formé par les points de $\mathbb{R}^2$ situés entre les deux droites d'équations cartésiennes $y = -x \pm 1$. Le domaine de la fonction $g(x,y) = \ln\big(1-x^2-y^2\big)$ est constitué par les points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $1-x^2-y^2 > 0$, ou de façon équivalente $x^2+y^2 < 1$, c'est-à-dire par l'intérieur du disque centré à l'origine et de rayon 1.

Représentation graphique. *Soit la fonction*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y). \end{array}$$

L'ensemble $\mathcal{S} = \{(x,y,f(x,y)),\ (x,y) \in \mathcal{D}\}$ est la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne

$$\left\{ \begin{array}{l} (x,y) \in \mathcal{D} \\ z = f(x,y). \end{array} \right.$$

Pour tout $C \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{P}_C$ le plan horizontal d'équation cartésienne $z = C$:

$$\mathcal{P}_C = \{(x,y,C),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

L'intersection de $\mathcal{S}$ avec $\mathcal{P}_C$,

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_C = \{(x,y,C),\ (x,y) \in \mathcal{D} \text{ vérifie } f(x,y) = C\},$$

est appelée courbe de niveau C de $\mathcal{S}$. Cette courbe de niveau est

— *soit vide,*
— *soit réduite à un point,*
— *soit une courbe incluse dans le plan $\mathcal{P}_C$.*

Exemple 15. *Soient a et b deux réels fixés et soit*

$$f(x,y) = (x-a)^2 + (y-b)^2, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pour tout réel C, on voit que

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{P}_C = \big\{\{(x,y,C), \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ vérifie } (x-a)^2 + (y-b)^2 = C\big\}$$

est
— *l'ensemble vide si $C < 0$,*
— *le cercle centré en (a,b,C) et de rayon $\sqrt{C}$, contenu dans le plan $z = C$, si $C \geq 0$.*
On remarque que ce cercle dégénère en le point $(a,b,0)$ lorsque $C = 0$.

Exercice 19. *Tracer les courbes de niveau puis tracer la surface représentative des fonctions suivantes :*
a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$
b) $g(x,y) = 6 - x - 2y$
c) $h(x,y) = x^2 + 2y^2$.

2.2 Continuité

2.2.1 Distance dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 12. *On appelle distance dans $\mathbb{R}^2$, toute application $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes pour tous (x,y), (x',y') et (x'',y'') de $\mathbb{R}^2$:*
i) Symétrie : $d((x,y),(x',y')) = d((x',y'),(x,y))$
ii) Séparation : $d((x,y),(x',y')) = 0 \Longleftrightarrow (x,y) = (x',y')$
iii) Inégalité triangulaire : $d((x,y),(x',y')) \leq d((x,y),(x'',y'')) + d((x'',y''),(x',y'))$.

Exercice 20. *Pour tous (x,y) et (x',y') de $\mathbb{R}^2$, on pose*

$$d_1\big((x,y),(x',y')\big) = \big|x - x'\big| + \big|y - y'\big|,$$

$$d_2((x,y),(x',y')) = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2},$$

$$d_\infty((x,y),(x',y')) = \max\big(\big|x - x'\big|, \big|y - y'\big|\big).$$

a) Vérifier que d_1, d_2 et d_∞ sont des distances dans $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer ensuite que $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq 2d_\infty$.

Boule ouverte associée à une distance. *Soient d une distance dans $\mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle boule ouverte dans $\mathbb{R}^2$ de centre (x_0,y_0) et de rayon r, associée à la distance d, est l'ensemble*

$$B_d((x_0,y_0),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ d((x_0,y_0),(x,y)) < r\}.$$

On note $B_1((x_0,y_0),r)$, (resp. $B_2((x_0,y_0),r)$, $B_\infty((x_0,y_0),r)$) la boule ouverte dans $\mathbb{R}^2$ de centre (x_0,y_0) et de rayon r, associée à la distance d_1 (resp. d_2, d_∞).

Exercice 21. *Représenter graphiquement $B_j((0,0),1)$ pour $j = 1,2,\infty$.*

2.2.2 Continuité en un point

Définition 13. *La fonction $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue en $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$ si*

$$\lim_{\substack{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)\\(x,y)\in\mathcal{D}}} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

c'est-à-dire si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $r_\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathcal{D},\ d((x_0,y_0),(x,y)) < r_\varepsilon \Longrightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \varepsilon,$$

pour (au moins) une distance d de $\mathbb{R}^2$.

Remarque 10. *Dans la Définition 13, il suffit que la condition $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \varepsilon$ soit satisfaite pour tous les points de la ouverte $B_d((x_0,y_0), r_\varepsilon)$ associée à n'importe quelle distance d de $\mathbb{R}^2$. En effet, on peut démontrer que si cette condition est vérifiée pour une distance particulière d, alors elle l'est automatiquement pour toutes les autres distances.*

Exemple 16. *La fonction $f(x,y) = 2x + y$, qui est définie sur $\mathbb{R}^2$, est continue en tout point $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. En effet, le point $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ étant fixé, on a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |2(x-x_0) + y - y_0| \leq 2|x-x_0| + |y-y_0| \leq 2d_1((x_0,y_0),(x,y)).$$

Ainsi, quel que soit le réel $\varepsilon > 0$ arbitrairement fixé, on a bien $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \varepsilon$ dès que $(x,y) \in B_1\left((x_0,y_0), \frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Définition 14. *Lorsque la fonction f est continue en tout point de $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$, on dit que f est continue sur $\mathcal{D}'$, et l'on note alors $f \in C^0(\mathcal{D}')$.*

Exemple 17. *La fonction f définie à l'Exemple 16 est continue en tout point $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ donc elle appartient à $C^0(\mathbb{R}^2)$.*

Exercice 22. *La fonction*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est-elle continue en $(0,0)$?

Propriétés. *Comme dans le cas d'une fonction d'une variable réelle, on vérifie facilement à partir de la Définition 13 que :*

i) *si f est continue en (x,y) alors λf est continue en (x,y) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$*

ii) *si f et g sont continues en (x,y) alors $f+g$ et fg sont continues en (x,y)*

iii) *si f est continue en (x,y) et que $f(x,y) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est continue en (x,y).*

Remarque importante. *Il résulte facilement de la Définition 13 que si la fonction de deux variables, f, est continue au point (x_0,y_0), alors :*

i) *$x \mapsto f(x,y_0)$ est une fonction (d'une seule variable) continue au point x_0,*

ii) *$y \mapsto f(x_0,y)$ est une fonction (d'une seule variable) continue au point y_0.*

Par contre, la réciproque est fausse. En d'autres termes, il ne suffit pas que $x \mapsto f(x, y_0)$ soit continue en x_0 et que $y \mapsto f(x_0, y)$ soit continue en y_0 pour que la fonction de deux variables, f, soit continue en (x_0, y_0).
Pour s'en convaincre, considérons la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On remarque que $y \mapsto f(0, y)$ est nulle sur $\mathbb{R}$. C'est donc une fonction continue en $y = 0$. De même, $x \mapsto f(x, 0)$ est nulle sur $\mathbb{R}$ donc cette fonction est continue en $y = 0$.
Et pourtant, la fonction $(x, y) \mapsto f(x, y)$ n'est pas continue en $(0, 0)$. En effet, pour tout x appartenant à $\mathbb{R}^*$, l'expression de $f(x, y)$ lorsque $x = y$ devient $f(x, x) = \frac{1}{2}$. Ainsi, si l'on choisit $\varepsilon = \frac{1}{4}$ par exemple, l'égalité $f(x, x) = \frac{1}{2}$, valable pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, prouve qu'il n'existe aucune boule centrée en $(0, 0)$ à l'intérieur de laquelle f a toutes ses valeurs inférieures à ε. En effet, f prend la valeur $\frac{1}{2}$ sur la droite d'équation cartésienne $y = x$, qui rencontre l'intérieur de n'importe quel disque centré en $(0, 0)$. Ceci montre bien que la fonction f n'est pas continue en $(0, 0)$.

2.3 Dérivation

2.3.1 Dérivées partielles

Définition 15. *Soient f une fonction définie sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$ et $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$.*

i) La dérivée partielle de f par rapport à x au point (x_0, y_0), est la dérivée de la fonction (d'une variable) $f_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$ au point x_0, si elle existe. Dans ce cas, on la note $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou $\partial_x f(x_0, y_0)$.

ii) La dérivée partielle de f par rapport à y au point (x_0, y_0), est la dérivée de la fonction (d'une variable) $f_{x_0} : y \mapsto f(x_0, y)$ au point y_0, si elle existe. Dans ce cas, on la note $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ou $\partial_y f(x_0, y_0)$.

Autrement dit, si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existent, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = (f_{y_0})'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_{y_0}(x_0 + h) - f_{y_0}(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = (f_{x_0})'(y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_{x_0}(y_0 + h) - f_{x_0}(y_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Lorsque f possède une dérivée partielle par rapport à x en tout point (x, y) de $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$, on peut alors définir la fonction "dérivée partielle de f par rapport à x", notée $\frac{\partial f}{\partial x}$, définie par :

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial x} : & \mathcal{D}' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \end{array}$$

De même, si f possède une dérivée partielle par rapport à y en tout point (x, y) de $\mathcal{D}'' \subset \mathcal{D}$, la fonction

$$\begin{array}{cccc} \frac{\partial f}{\partial y} : & \mathcal{D}'' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{array}$$

est appelée "dérivée partielle de f par rapport à y".
Lorsque les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur un sous-ensemble $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$, f est dite de classe C^1 sur $\mathcal{D}'$ et l'on note dans ce cas $f \in C^1(\mathcal{D}')$.

Remarque 11. *On vérifie facilement que*

$$f \in C^1(\mathcal{D}) \Longrightarrow f \in C^0(\mathcal{D}).$$

Exemple 18. *Soit $f(x,y) = 2x^3 + y^2 + xy$. Alors, quel que soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ fixé, la fonction $f_{x_0}(y) = 2x_0^3 + y^2 + x_0 y$ est un polynôme (en y) donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, on a*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) = (f_{x_0})'(y) = 2y + x_0.$$

De la même façon, la fonction $f_{y_0}(x) = 2x^3 + y_0^2 + y_0 x$ est polynômiale (en x) donc dérivable sur $\mathbb{R}$ entier, et l'on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0) = 6x^2 + y_0.$$

Exercice 23. *Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :*

a) $f(x,y) = x^2 \sin^2 y$

b) $g(x,y) = \arcsin(x+y)$

c) $h(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Définition 16. *Lorsque $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existent simultanément, le gradient de f au point (x,y) est défini par le "vecteur" de $\mathbb{R}^2$ suivant :*

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right).$$

Exercice 24. *Soit la fonction $g(x,y) = \ln\big(1 + x^2 + y^4\big)$.*

a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de g.

b) Calculer ensuite le gradient de g en tout point (x,y) de $\mathcal{D}$ en lequel il existe.

2.3.2 Dérivées d'ordre supérieur

Soit f une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Lorsque les fonctions

$$(x,y) \mapsto \partial_x f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{et} \quad (x,y) \mapsto \partial_y f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

possèdent une dérivée partielle par rapport à x, on pose

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial(\partial_x f)}{\partial x}(x,y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial(\partial_y f)}{\partial x}(x,y),$$

et lorsqu'elles possèdent une dérivée partielle par rapport à y, on définit

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial(\partial_x f)}{\partial y}(x,y), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial(\partial_y f)}{\partial y}(x,y).$$

Si ces nouvelles dérivées partielles (dites du second ordre ou bien encore d'ordre 2) sont toutes les quatre continues sur $\mathcal{D}$, alors la fonction f est dite de classe C^2 sur $\mathcal{D}$ et l'on note $f \in C^2(\mathcal{D})$.

Dans ce cas, on dispose du théorème de Schwarz (admis) suivant.

Théorème 6. *Si les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues en (x_0, y_0), alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Exemple 19. *Reprenons la fonction f définie dans l'Exemple 18. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a vu que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + y$. Cette fonction est polynômiale en (x,y) donc elle possède des dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 1.$$

La fonction $(x,y) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$ est constante sur $\mathbb{R}^2$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}^2$.
Par ailleurs, comme $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x$, on a $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$. On retrouve donc sur cet exemple que $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$, ce qui était annoncé par le Théorème 6.

Exercice 25. *Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction g définie à l'Exercice 24.*

2.3.3 Dérivation composée

Soit f une fonction de deux variables de classe C^1 sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. On considère ensuite deux fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, telles que

$$\forall t \in I, \ (x(t), y(t)) \in \mathcal{D}.$$

Ceci permet de définir la fonction composée $F(t) = f\left(x(t), y(t)\right)$ pour tout $t \in I$.

Théorème 7. *La fonction F est dérivable sur I et pour tout $t \in I$, sa dérivée s'écrit :*

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t), y(t)\right) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t), y(t)\right) \times y'(t).$$

Ce résultat nous servira notamment à démontrer les Théorèmes 8 et qui suivent.

Remarque 12. *L'expression de $F'(t)$ donnée au Théorème 7 se réécrit de façon équivalente sous la forme suivante :*

$$F'(t) = \nabla f(x(t), y(t)) \ (x'(t), y'(t))^T,$$

où la transposée de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ est définie par $(a,b)^T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Autrement dit,

$$F'(t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\right) \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Exercice 26. *En utilisant les résultats obtenus à l'Exercice 24, calculer la dérivée de la fonction $h(t) = \ln\left(1 + \sin^2 t + t^4\right)$ en tout réel t en lequel elle est définie.*

2.3.4 Formule des accroissements finis

Théorème 8. *Soit f une fonction de deux variables réelles, continue sur $[a, a+h] \times [b, b+k]$ (où $h > 0$ et $k > 0$) et de classe C^1 sur $]a, a+h[\times]b, b+k[$. Alors, il existe (au moins) un réel $\theta \in]0,1[$ tel que*

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a,b) &= \nabla f(a + \theta h, b + \theta k) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \\ &= h \frac{\partial f}{\partial x}(a + \theta h, b + \theta k) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a + \theta h, b + \theta k). \end{aligned}$$

Démonstration. Pour tout $t \in [0,1]$, posons $F(t) = f(a+th, b+tk)$. La fonction F est continue sur $[0,1]$ et, le Théorème 7 garantit (il suffit de poser $x(t) = a+th$ et $y(t) = b+tk$) qu'elle est dérivable sur $]0,1[$ et que pour chaque $t \in]0,1[$,

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk)h + \frac{\partial f}{\partial y}(a+th, b+tk)k.$$

Comme F est une fonction d'une seule variable, le Théorème 4 s'applique : il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$\underbrace{F(1)}_{f(a+h,b+k)} - \underbrace{F(0)}_{f(a,b)} = (1-0)F'(\theta),$$

ce qui achève la démonstration. □

Conséquences. *On peut déduire du Théorème 8 les deux conséquences simples (mais importantes) suivantes :*

i) Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in]a, a+h[\times]b, b+k[$, alors la fonction f ne dépend que de la variable y : il existe une fonction $\varphi :]b, b+k[\longrightarrow \mathbb{R}$, telle que

$$\forall (x,y) \in]a, a+h[\times]b, b+k[, \; f(x,y) = \varphi(y).$$

ii) Si $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in]a, a+h[\times]b, b+k[$, alors la fonction f est constante sur le pavé $]a, a+h[\times]b, b+k[$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \Longrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \; \forall (x,y) \in]a, a+h[\times]b, b+k[, \; f(x,y) = C.$$

Remarque 13. *La conséquence ii) se réécrit de façon équivalente sous la forme suivante :*

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Longrightarrow \exists C \in \mathbb{R}, \; \forall (x,y) \in]a, a+h[\times]b, b+k[, \; f(x,y) = C.$$

2.3.5 Formule de Taylor à l'ordre 2

Commençons par rappeler l'énoncé du Théorème 5 : si

$$f \in C^0([a, a+h]) \cap C^2(]a, a+h[), \; a \in \mathbb{R}, \; h > 0,$$

alors pour chaque $t \in]0, h[$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(a+t) = f(a) + f'(a)t + \frac{1}{2}f''(a+\theta t)t^2.$$

Cette formule se généralise au cas des fonctions de deux variables réelles.

Théorème 9. *Soient a et b deux réels, soient $h > 0$ et $k > 0$, et soit soit f une fonction de deux variables réelles, continue sur $[a, a+h] \times [b, b+k]$ et de classe C^2 sur $]a, a+h[\times]b, b+k[$.*
Alors, il existe (au moins) un réel $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) &= f(a,b) + h\tfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\tfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ &+ \tfrac{1}{2}\left[h^2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+\theta h, b+\theta k) + 2hk\tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+\theta h, b+\theta k) + k^2\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+\theta h, b+\theta k)\right]. \end{aligned}$$

Démonstration. Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $F(t) = f(a+th, b+tk)$ définie sur $[0,1]$, vérifie les hypothèses du Théorème 5. Il existe donc $\theta \in]0,1[$ tel que

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(\theta).$$

Or, le Théorème 7 nous dit que

$$\forall t \in]0,1[,\ F'(t) = h\frac{\partial f}{\partial x}(a+th, b+tk) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a+th, b+tk).$$

Comme $f \in C^2(]a, a+h[\times]b, b+k[)$, le Théorème 7 s'applique à nouveau à F'. On obtient ainsi, pour tout $t \in]0,1[$,

$$F''(t) = h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th, b+tk) + hk\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+th, b+tk) + kh\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+th, b+tk) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th, b+tk).$$

Enfin, comme f est de classe C^2 sur $]a, a+h[\times]b, b+k[$, le Théorème 6 nous donne

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a+th, b+tk) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+th, b+tk),$$

ce qui termine la démonstration. □

Remarque 14. *Si l'on convient de définir la matrice Hessienne de f au point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ par*

$$H_f(a,b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{pmatrix},$$

alors la formule de Taylor à l'ordre 2 du Théorème 9 se réécrit sous la forme "condensée" suivante :

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + \nabla f(a,b)(h,k)^T + \frac{1}{2}(h,k)H_f(a+\theta h, b+\theta k)(h,k)^T.$$

2.3.6 Application à la recherche d'extrema locaux

Étant donnés $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $H > 0$ et $K > 0$, on considère une fonction numérique f définie sur $]x_0 - H, x_0 + H[\times]y_0 - K, y_0 + K[$.

Définition 17. *On dit que (x_0, y_0) est un maximum local (resp. minimum local) de f s'il existe $\Delta x \in]0, H]$ et $\Delta y \in]0, K]$ tels que*

$$\forall (x,y) \in]x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x[\times]y_0 - \Delta y, y_0 + \Delta y[,\ f(x,y) \leq f(x_0, y_0) \quad (\textit{resp. } f(x,y) \geq f(x_0,y_0)).$$

Les minima ou les maxima locaux de la fonction f sont des extrema locaux de f.

Condition nécéssaire d'existence d'un extremum local. *Il est évident que si (x_0, y_0) est un extremum local de f, alors*

i) x_0 est un extremum local de la fonction (d'une seule variable) $x \mapsto f(x, y_0)$

ii) y_0 est un extremum local de la fonction (d'une seule variable) $y \mapsto f(x_0, y)$.

Cela justifie le résultat suivant.

Théorème 10. *Si f possède des dérivées partielles au point (x_0, y_0), alors :*

$$(x_0, y_0) \textit{ est un extremum local de } f \implies \nabla f(x_0, y_0) = (0,0) \iff \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Tout point $(x,y) \in]x_0-H,x_0+H[\times]y_0-K,y_0+K[$ en lequel f possède des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ qui sont simultanément nulles, s'appelle un point stationnaire (ou critique) de f.
Ainsi, le Théorème 10 dit simplement que les extrema locaux de f (supposée posséder des dérivées partielles en tout point de $]x_0-H,x_0+H[\times]y_0-K,y_0+K[$) sont à chercher parmi les points stationnaires de f.

Remarque 15. *Il n'y a pas de réciproque à ce résultat. Autrement dit, un point stationnaire de f n'est pas forcément un extremum local de f.*
Pour le voir, considérons la fonction $f(x,y)=xy$ définie sur $\mathbb{R}^2$. On a bien

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0,$$

puisque $\nabla f(x,y)=(y,x)$ en tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, et pourtant $(0,0)$ n'est pas un extremum local de f puisque $f(0,0)=0$ alors que $f(x,y)<0$ lorsque $(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_-^*\right)\cup\left(\mathbb{R}_-^*\times\mathbb{R}_+^*\right)$ et $f(x,y)>0$ lorsque $(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*\right)\cup\left(\mathbb{R}_-^*\times\mathbb{R}_-^*\right)$.

Etude locale au voisinage d'un point stationnaire. *Supposons que f satisfait les hypothèses du Théorème 9, c'est-à-dire que $f\in C^0([x_0-H,x_0+H]\times[y_0-K,y_0+K])\cap C^2(]x_0-H,x_0+H[\times]y_0-K,y_0+K[)$ et que (x_0,y_0) est un point stationnaire de f.*
Comment savoir si (x_0,y_0) est un extremum local de f ?
Pour tout $(x,y)\in]x_0-H,x_0+H[\times]y_0-K,y_0+K[$, la fonction $f\in C^0([x_0,x]\times[y_0,y])\cap C^2(]x_0,x[\times]y_0,y[)$ donc le Théorème 9 s'applique : il existe $\theta\in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x,y) = \quad & f(x_0,y_0)+h\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}_{0}+k\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}_{0} \\ + \quad & \tfrac{1}{2}\left[h^2\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+2hk\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+k^2\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)\right], \end{aligned}$$

où l'on a posé $h=x-x_0$ et $k=y-y_0$.
Autrement dit, on a

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}\left(\underbrace{h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)+2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)+k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)}_{P(h,k)}\right)+(h^2+k^2)\varepsilon(h,k),$$

avec bien sûr

$$\begin{aligned} 2\varepsilon(h,k) = \quad & \tfrac{h^2}{h^2+k^2}\left[\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)-\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\right] \\ + \quad & \tfrac{2hk}{h^2+k^2}\left[\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)-\tfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right] \\ + \quad & \tfrac{k^2}{h^2+k^2}\left[\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0+\theta h,y_0+\theta k)-\tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right]. \end{aligned}$$

Comme f est de classe C^2 sur $]x_0-H,x_0+H[\times]y_0-K,y_0+K[$, les fonctions $(x,y)\mapsto\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $(x,y)\mapsto\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$ et $(x,y)\mapsto\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ sont continues au point (x_0,y_0), donc :

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\varepsilon(h,k)=0.$$

Ceci montre que le signe de $(x,y)\mapsto f(x,y)-f(x_0,y_0)$ lorsque (x,y) est proche de (x_0,y_0) (c'est-à-dire lorsque h et k sont proches de 0) est déterminé par celui de $P(h,k)$.

Etude du signe de $(h,k) \mapsto P(h,k)$. *Pour tout $k \neq 0$, posons $u = \frac{h}{k}$, de sorte que l'on a*

$$P(h,k) = k^2 \underbrace{\left[u^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) + 2u\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\right]}_{T(u)}.$$

Le signe de $P(h,k)$ est donc celui de $T(u)$. Or, le discriminant réduit de ce trinôme s'écrit

$$\Delta' = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0),$$

et il est bien connu que :

a) si $\Delta' < 0$: $u \mapsto T(u)$ garde un signe constant ;
   i) si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$: T est positif, donc (x_0,y_0) est un minimum local de f ;
   ii) si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$: T est négatif, donc (x_0,y_0) est un maximum local de f ;

b) si $\Delta' > 0$: $u \mapsto T(u)$ change de signe, donc (x_0,y_0) n'est pas un extremum local de f ;

c) si $\Delta' = 0$: on ne peut pas prévoir si T change de signe ou s'il garde un signe constant, ce qui empêche de conclure directement. Pour cela, il faudrait écrire le développement de Taylor de la fonction f en (x_0,y_0) jusqu'à l'ordre 3 au minimum.

En remarquant que le discriminant réduit Δ' utilisé ci-dessus est l'opposé du déterminant de la matrice Hessienne $H_f(x_0,y_0)$ de f en (x_0,y_0), on peut réécrire le résultat précédent comme suit.

Conclusion. *Soit (x_0,y_0) un point critique de f.*

a) Si $\det H_f(x_0,y_0) > 0$ alors f admet un extremum local en (x_0,y_0), qui est
   i) un minimum local lorsque $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$,
   ii) un maximum local lorsque $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$.

b) Si $\det H_f(x_0,y_0) < 0$ alors f n'admet d'extremum local en (x_0,y_0).

c) Si $\det H_f(x_0,y_0) = 0$ alors on ne peut pas conclure directement.

Exemple 20. *La fonction $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ est définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et*

$$\nabla f(x,y) = (-2xe^{-(x^2+y^2)}, -2ye^{-(x^2+y^2)}) = -2e^{-(x^2+y^2)}(x,y).$$

Par suite, f admet un unique point critique, qui est $(x,y) = (0,0)$.
Ensuite, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on vérifie par un calcul direct que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2(2x^2-1)e^{-(x^2+y^2)}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2(2y^2-1)e^{-(x^2+y^2)}e^{-(x^2+y^2)},$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4xye^{-(x^2+y^2)},$$

donc la matrice Hessienne de f en $(0,0)$ est

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est $\det H_f(0,0) = (-2)^2 - 0^2 = 4 > 0$ donc f admet un extremum local en $(0,0)$. De plus, comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -2 < 0$ alors c'est un maximum local.

Exercice 27. *Déterminer, quand ils existent, les extrema locaux des fonctions suivantes :*

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$

b) $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$

c) $h(x,y) = x^3 + y^3$

d) $k(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$

e) $\ell(x,y) = x^4 - 2x^2 + 2y^2.$