Optimisation

Table des matières

1 Différentiabilité et conditions de minimalité

Dans cette section E désigne un e.v.n. et $\mathcal{O}$ un ouvert de E.

1.1 Condition du premier ordre

1.1.1 Condition d'Euler

Proposition 1.1. Si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ admet un extremum local en $x \in \mathcal{O}$ et si f est différentiable en x, alors :

$$f'(x) = 0.$$

1.1.2 Extrema liés

Attention : dans l'énoncé suivant $E = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

Proposition 1.2. Soient $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble contrainte :

$$\mathcal{S} = \{y \in \mathcal{O},\ g_i(y) = 0,\ 1 \leq i \leq p\} \text{ où } g_i \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}).$$

Si

(a) $x \in \mathcal{S}$ est minimum local de f sur $\mathcal{S}$

(b) f est différentiable en x

(c) $\mathrm{rg}(\partial_j g_i(x))_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n} = p$,

alors :

$$\exists!(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } f'(x) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i'(x) = 0.$$

Les coefficients λ_i sont appelés *multiplicateurs de Lagrange.*

1.2 Conditions du second ordre

1.2.1 Condition nécessaire

Proposition 1.3. Si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ admet un minimum local en $x \in \mathcal{O}$ et si f est 2 fois différentiable au point x, alors ($f'(x) = 0$ et) :

$$f''(x) \geq 0. \tag{1}$$

Attention : la condition (1) signifie que la forme bilinéaire $f''(x)$ est positive, c'est-à-dire :

$$f''(x)(y, y) \geq 0,\ \forall y \in E.$$

1.2.2 Conditions suffisantes

Proposition 1.4. Soit $x \in \mathcal{O}$ en lequel la fonction $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ satisfait la condition d'Euler $f'(x) = 0$.

(i) Si f est 2 fois différentiable au point x et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$f''(x)(y, y) \geq \alpha \|y\|^2,\ y \in E,$$

alors f admet un minimum local strict en x.

(ii) Si f est 2 fois différentiable dans $\mathcal{O}$ et qu'il existe un voisinage V de x tel que

$$f''(v)(y, y) \geq 0,\ v \in V,\ y \in E,$$

alors f admet un minimum local en x.

1.3 Convexité

1.3.1 Ensemble convexe.

Définition. Un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de E est dit *convexe* si $(1-t)x + ty \in \mathcal{C}$ pour tous $t \in]0,1[$ et $x, y \in \mathcal{C}$.

Proposition 1.5. Soient $\mathcal{C}$ un sous-ensemble convexe de $\mathcal{O}$ et $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$. Si f est différentiable en $x \in \mathcal{C}$ alors :

$$(f \text{ admet un minimum local en } x \text{ par rapport à } \mathcal{C}) \Longrightarrow (f'(x)(y-x) \geq 0, \ \forall y \in \mathcal{C}).$$

Remarque 1.6. Si $\mathcal{C} = a + E_0$ où $a \in E$ et E_0 est un s.e.v. de E, la condition précédente devient $f'(x)h = 0$ pour tout $h \in E_0$. Si $a = 0$ et $E_0 = E$ on retrouve alors la condition d'Euler $f'(x) = 0$.

1.3.2 Fonction convexe

Définition. La fonction $f : \mathcal{C} \subset E \mapsto \mathbb{R}$ est *convexe* sur $\mathcal{C}$ si :

$$\forall x, y \in \mathcal{C}, \ \forall t \in (0,1), \ f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y). \tag{2}$$

La fonction f est *strictement convexe* si l'inégalité (2) est stricte dès que $x \neq y$.

Remarque 1.7. f est convexe sur $\mathcal{C}$ si et seulement si

$$\mathrm{epi}(f) = \{(v, y) \in E \times \mathbb{R}, \ v \in \mathcal{C} \text{ et } y \geq f(v)\}$$

est convexe dans $E \times \mathbb{R}$.

Convexité et différentiabilité.

Proposition 1.8. Soient f différentiable dans $\mathcal{O} \subset E$ et $\mathcal{C}$ un convexe de $\mathcal{O}$. Alors :
(a) $(f \text{ est convexe sur } \mathcal{C}) \Longleftrightarrow (f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x), \ \forall x, y \in \mathcal{C})$.
(b) $(f \text{ est strictement convexe sur } \mathcal{C}) \Longleftrightarrow (f(y) > f(x) + f'(x)(y-x), \ \forall x \neq y \in \mathcal{C})$.

Application : Si $A = A^T \in M_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ alors la fonctionnelle quadratique

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle, \end{array}$$

est :
(i) convexe si et seulement si A est positive ($A \geq 0$).
(ii) strictement convexe si et seulement si A est définie positive ($A > 0$).

Proposition 1.9. Soient f 2 fois différentiable dans $\mathcal{O} \subset E$ et $\mathcal{C}$ un convexe de $\mathcal{O}$. Alors :
(a) $(f \text{ est convexe sur } \mathcal{C}) \Longleftrightarrow (f''(x)(y-x, y-x) \geq 0, \ \forall x, y \in \mathcal{C})$.
(b) $(f''(x)(y-x, y-x) > 0, \ \forall x \neq y \in \mathcal{C}) \Longrightarrow (f \text{ est strictement convexe sur } \mathcal{C})$.

1.3.3 Conditions de minimalité dans le cas convexe

Proposition 1.10. Soit $\mathcal{C}$ une partie convexe de E.

(i) Si $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est convexe alors les 2 propositions suivantes sont équivalentes :

  (a) x est un minimum (global) de f sur $\mathcal{C}$.

  (b) x est un minimum local de f.

(ii) Si $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est strictement convexe sur $\mathcal{C}$ alors il existe au plus un x minimisant f sur $\mathcal{C}$ (et s'il existe c'est donc un minimum strict).

(iii) Si $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ est convexe et différentiable en $x \in \mathcal{C} \subset \mathcal{O}$, on a les résultats suivants :

$$(f(y) \geq f(x),\ \forall y \in \mathcal{C}) \Longleftrightarrow (f'(x)(y-x) \geq 0,\ \forall y \in \mathcal{C}).$$

Application : La fonctionnelle $f : \mathbb{R}^n \ni x \mapsto 1/2\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle$ où $A = A^T \in M_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$, satisfait les conditions suivantes :

(a) $(\exists x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \leq f(y),\ \forall y \in \mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow (A \geq 0 \text{ et } b \in \operatorname{Im} A)$.

(b) $(\exists x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) < f(y),\ \forall y \in \mathbb{R}^n - \{x\}) \Longleftrightarrow (A > 0)$.

(c) Si $A \geq 0$ et $b \notin \operatorname{Im} A$ alors $\inf_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) = -\infty$.

(d) Si $\inf_{y \in \mathbb{R}^n} f(y) \neq -\infty$ alors $A \geq 0$ et $b \in \operatorname{Im} A$.

2 Existence de solutions aux problèmes d'optimisation

Dans cette section $\mathcal{H}$ désigne un espace de Hilbert réel. On note $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire sur $\mathcal{H}$ et $\|.\|$ la norme associée.
Rappelons qu'il est possible d'identifier $\mathcal{H}$ à son dual $\mathcal{H}' = \mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathbb{R})$ (l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathcal{H}$) via le *théorème de Riesz-Fréchet* :

Théorème 2.1. Etant donné $\varphi \in \mathcal{H}'$ il existe un unique $f_\varphi \in \mathcal{H}$ tel que

$$\varphi(h) = \langle f_\varphi, h\rangle,\ \forall h \in \mathcal{H}.$$

De plus on a $\|\varphi\|_{\mathcal{H}'} = \|f_\varphi\|$.

En effet ce théorème montre que toute forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$ peut se représenter à l'aide du produit scalaire et que l'application $\varphi \mapsto f_\varphi$ est un isomorphisme isométrique.

2.1 Optimisation au sens des moindres carrés

2.1.1 Projection sur un convexe fermé.

On rappelle le théorème de projection sur un sous-ensemble convexe fermé d'un espace hilbertien :

Theorem 2.2. Si $\mathcal{C} \subset H$ un convexe fermé non vide alors

$$\forall h \in H,\ \exists! Ph \in \mathcal{C},\ \|Ph - h\| = \inf_{x \in \mathcal{C}} \|x - h\|.$$

Ph s'appelle la *projection de h sur $\mathcal{C}$* et :

$$y = Ph \iff (y \in \mathcal{C} \text{ et } \langle y-h, x-y\rangle \geq 0,\ \forall x \in \mathcal{C})\,. \tag{3}$$

De plus, l'application $P : H \to \mathcal{C}$ (qui n'est pas nécessairement linéaire) n'augmente pas les distances, en ce sens que :

$$\|Ph_2 - Ph_1\| \leq \|h_2 - h_1\|,\ \forall h_1, h_2 \in H.$$

En fait on démontre que P est linéaire si et seulement si $\mathcal{C} = V$ est un sous-espace vectoriel de H. Dans ce cas, (3) devient

$$y = Ph \iff (y \in V \text{ et } \langle Ph - h, v\rangle = 0,\ \forall v \in V)\,,$$

et l'on a :

(i) P est linéaire

(ii) $P = P^* = P^2$ (P est la projection othogonale de H sur le sous-espace $P(H)$).

2.1.2 Equations normales.

Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n \geq 1$, $b \in \mathbb{R}^m$. Posons

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n,\ A^T A x = A^T b\}.$$

On a alors :

(a) $S \neq \emptyset$ et $(x \in S) \iff (\|Ax - b\| = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \|Ay - b\|)$.

(b) (i) Si $\operatorname{rg} A = n$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ unique tel que

$$\|Ax - b\| = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \|Ay - b\|.$$

x étant (l'unique) solution de $A^T A x = A^T b$.

(ii) Si $\operatorname{rg} A < n$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ unique tel que :

$$\begin{cases} \|Ax - b\| = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} \|Ay - b\| \\ \|x\| = \inf_{y\in S} \|y\|. \end{cases}$$

x est caractérisé par la relation $x \in S \cap [\ker(A^T A)]^\perp$, ce qui revient à écrire $x = A^+ b$, A^+ étant la pseudo-inverse de A.

2.2 Cas d'une fonctionnelle quadratique

Définition. On appelle *fonctionnelle quadratique* sur $\mathcal{H}$ une application $F : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ de la forme suivante :

$$F(h) = \frac{1}{2} a(h,h) - \varphi(h) \text{ où } a \in \mathcal{L}_2(\mathcal{H};\mathbb{R}) \text{ est symétrique et } \varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{H};\mathbb{R}) = \mathcal{H}'. \tag{4}$$

S'il existe de plus $\alpha > 0$ tel que

$$\forall h \in \mathcal{H},\ a(h,h) \geq \alpha \|h\|^2, \tag{5}$$

alors a est un produit scalaire sur $\mathcal{H}$ équivalent à $\langle .,. \rangle$:

$$\forall h \in \mathcal{H},\ \alpha^{1/2}\|h\| \leq \|h\|_a = a(h,h)^{1/2} \leq \|a\|^{1/2}_{\mathcal{L}_2(\mathcal{H};\mathbb{R})}\|h\|.$$

L'application linéaire φ est donc continue pour la topologie induite par a, ce qui garantit (via le théorème 2.1 de Riesz-Fréchet) l'existence (et l'unicité) de $h_\varphi \in \mathcal{H}$ satisfaisant $\varphi(h) = a(h_\varphi, h)$ pour tout $h \in \mathcal{H}$. Ceci, combiné à la définition (4) entraîne

$$\forall h \in \mathcal{H},\ F(h) = \frac{1}{2}\|h - h_\varphi\|_a^2 - \frac{1}{2}\|h_\varphi\|_a^2,$$

ce qui permet ensuite de déduire du théorème 2.2 :

Proposition 2.3. Soient $\mathcal{C}$ un convexe fermé et non vide de $\mathcal{H}$ et F la fonctionnelle quadratique définie par (4). Si F vérifie (5) alors il existe un unique $x^* \in \mathcal{C}$ satisfaisant :

$$F(x^*) = \inf_{x\in\mathcal{C}} F(x).$$

De plus, x^* est caractérisé par l'inégalité :

$$\forall x \in \mathcal{C},\ a(x^*, x - x^*) \geq \varphi(x - x^*).$$

2.3 Cas d'une fonctionnelle convexe

Utilisant la compacité faible de la boule unité de $\mathcal{H}$, il est possible d'affaiblir les hypothèses de la proposition 2.3 comme suit :

Proposition 2.4. Soient $\mathcal{C}$ un convexe fermé et non vide de $\mathcal{H}$ et $F : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle convexe et dérivable sur $\mathcal{C}$ telle que :

$$\lim_{\|x\|\to\infty} F(x) = +\infty \text{ si } \mathcal{C} \text{ est non borné.} \tag{6}$$

Alors il existe $x^* \in \mathcal{C}$ tel que

$$F(x^*) = \inf_{x\in\mathcal{C}} F(x).$$

De plus x^* est caractérisé par la relation : $\langle \nabla F(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathcal{C}$.

Ellipticité. $F \in C^1(\mathcal{H};\mathbb{R})$ est dite *elliptique* s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathcal{H},\ \langle \nabla F(x) - \nabla F(y), x - y \rangle \geq \alpha\|x - y\|^2.$$

α s'appelle la *constante d'ellipticité* de F.
Si F est deux fois dérivable dans $\mathcal{H}$, alors on a l'équivalence suivante :

$$(F \text{ est elliptique}) \Longleftrightarrow (F''(x)(y,y) \geq \alpha\|y\|^2,\ \forall x, y \in \mathcal{H}).$$

Remarque 2.5. La fonctionnelle quadratique F définie par (4) est elliptique de constante d'ellipticité $\alpha > 0$ si et seulement si

$$\forall h \in \mathcal{H}, \; a(h, h) \geq \alpha \|h\|^2.$$

Plus particulièrement, si $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$ de sorte qu'il existe $(A = A^T, b) \in M_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$ (unique) tel que

$$F(h) = \frac{1}{2}\langle Ah, h\rangle - \langle b, h\rangle, \; h \in \mathbb{R}^n,$$

alors F est elliptique de constante d'ellipticité $\alpha > 0$ si et seulement si $A > 0$.

Concernant les fonctionnelles elliptiques on déduit notamment de la proposition 2.4 :

Proposition 2.6. Si F une fonctionnelle elliptique, de constante d'ellipticité $\alpha > 0$, alors :

(a) F est strictement convexe et satisfait la condition (6) car

$$\forall x, y \in \mathcal{H}, \; F(x) \geq F(y) + \langle \nabla F(y), x - y\rangle + \frac{\alpha}{2}\|x - y\|^2.$$

(b) Pour tout $\mathcal{C}$ convexe fermé et non vide de $\mathcal{H}$, il existe un unique $x^* \in \mathcal{C}$ tel que

$$F(x^*) = \inf_{x \in \mathcal{C}} F(x).$$

De plus, x^* est caractérisé par la condition :

$$\forall x \in \mathcal{C}, \; \langle \nabla F(x^*), x - x^*\rangle \geq 0.$$

3 Méthodes de descente

3.1 La méthode du gradient à pas optimal

Dans cette section $\mathcal{H}$ désigne encore un espace de Hilbert réel et l'on note $\langle ., .\rangle$ le produit scalaire sur $\mathcal{H}$ et $\|.\|$ la norme associée.

3.1.1 Principe de la méthode

Etant donnée une fonctionnelle F définie sur $\mathcal{H}$, on cherche à approximer une solution du problème d'optimisation sans contrainte : trouver x tel que,

$$(\mathcal{P}) \quad x \in \mathcal{H} \text{ et } F(x) = \inf_{y \in \mathcal{H}} F(y).$$

Pour cela, partant d'un vecteur arbitraire $x_0 \in \mathcal{H}$, on construit une suite de vecteurs $(x_k)_{k \geq 0}$, définis par la relation,

$$x_{k+1} = x_k - \rho_k \nabla F(x_k), \; k \geq 0, \tag{7}$$

où ρ_k est choisi de façon “optimale”, en ce sens que :

$$F(x_k - \rho_k \nabla F(x_k)) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} F(x_k - \rho \nabla F(x_k)). \tag{8}$$

3.1.2 Cas d'une fonctionnelle elliptique

On suppose désormais que $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, et que F est une fonctionnelle elliptique de constante d'ellipticité $\alpha > 0$.
L'objectif de cette partie est de prouver que la méthode du gradient à pas optimal converge, c'est-à-dire que la suite $(x_k)_{k\geq 0}$ définie au paragraphe précédent par les relations (7) et (8), converge vers la (elle est unique compte tenu de l'ellipticité de F) solution x du problème $(\mathcal{P})$, et ceci quel que soit le choix du vecteur initial x_0. Pour cela, on fera l'hypothèse supplémentaire :

$$\forall k \geq 0, \ \nabla F(x_k) \neq 0. \tag{9}$$

1. Expliquer pourquoi l'hypothèse (9) ne restreint pas la généralité de cette étude.
2. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f_k : \mathbb{R} \ni \rho \mapsto F(x_k - \rho \nabla F(x_k))$.
   (a) Montrer que f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie :
   $$f_k(\rho') \geq f_k(\rho) + (\rho' - \rho) f_k'(\rho) + \frac{\alpha}{2}(\rho' - \rho)^2 \|\nabla F(x_k)\|^2, \ \forall \rho, \rho' \in \mathbb{R}.$$
   (b) En déduire que f_k est strictement convexe sur $\mathbb{R}$ et que $\lim_{|\rho|\to\infty} f_k(\rho) = +\infty$.
   (c) Montrer alors qu'il existe un unique $\rho_k \in \mathbb{R}$ satisfaisant (8) et que "deux gradients consécutifs" sont orthogonaux :
   $$\langle \nabla F(x_{k+1}), \nabla F(x_k) \rangle = 0. \tag{10}$$
3. (a) Déduire de (10) que $\langle \nabla F(x_{k+1}), x_{k+1} - x_k \rangle = 0$, puis en tirant partie de l'ellipticité de F, prouver que :
   $$F(x_k) - F(x_{k+1}) \geq \frac{\alpha}{2} \|x_k - x_{k+1}\|^2, \ \forall k \geq 0. \tag{11}$$
   (b) Montrer à partir de (11) que la suite $(F(x_k))_k$ converge.
   (c) Déduire de ce qui précède que
   $$\lim_{k\to+\infty} \|x_k - x_{k+1}\| = 0. \tag{12}$$
4. Montrer à partir de (10) que
   $$\|\nabla F(x_k)\| \leq \|\nabla F(x_k) - \nabla F(x_{k+1})\|, \ \forall k \geq 0. \tag{13}$$
5. Montrer à partir de la question 3(b) et du comportement de F à l'infini que la suite $(x_k)_{k\geq 0}$ est bornée.
6. En utilisant la continuité uniforme de F' sur les compacts de $\mathbb{R}^n$, montrer à l'aide de (12) et (13) que $\lim_{k\to+\infty} \nabla F(x_k) = 0$.
7. Montrer enfin que $\|x_k - x\| \leq \alpha^{-1} \|\nabla F(x_k)\|$ pour tout $k \geq 0$.

3.1.3 Cas d'une fonctionnelle quadratique

La matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$, étant symétrique définie positive et b appartenant à $\mathbb{R}^n$, on note $(x_k)_{k\geq 0}$ la suite minimisante définie à partir de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ par la méthode du gradient à pas optimal appliquée à la minimisation sur $\mathbb{R}^n$ de la fonctionnelle quadratique :

$$F(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle,\ b, x \in \mathbb{R}^n.$$

On pose $e_k = x_k - A^{-1}b$ pour tout $k \geq 0$ et $\|y\|_A^2 = \langle Ay, y\rangle$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\|e_{k+1}\|_A^2 = r_k\|e_k\|_A^2$ pour tout $k \geq 0$, où :

$$r_k = 1 - \frac{\|Ae_k\|^4}{\|e_k\|_A^2\|Ae_k\|_A^2}.$$

2. Montrer ensuite que $r_k \leq 1 - \frac{1}{\mathrm{cond}_2(A)}$.

3.2 La méthode du gradient conjugué

3.2.1 Principe de la méthode

Etant donnée une fonctionnelle $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$, supposée elliptique, on cherche à approximer une solution du problème d'optimisation sans contrainte : trouver x tel que,

$$(\mathcal{P}) \qquad x \in \mathbb{R}^n \text{ et } F(x) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} F(y).$$

Pour cela, on construit une suite $(x_m)_{m\geq 0}$ (à partir d'un vecteur arbitraire $x_0 \in \mathbb{R}^n$), satisfaisant pour tout $m \geq 0$:

$$F(x_{m+1}) = \inf_{y\in V_m} F(x_m + y) \text{ où } V_m = \mathrm{vect}\{\nabla F(x_0), \nabla F(x_1), \ldots, \nabla F(x_m)\}$$

Il s'agit d'une méthode de descente dont la direction à l'étape m est choisie de façon optimale dans V_m.

1. Expliquer pourquoi x_m est bien défini de façon unique pour tout $m \geq 0$.
2. Montrer ensuite que “les gradients sont deux à deux orthogonaux” :

$$\langle\nabla F(x_m), \nabla F(x_i)\rangle = 0,\ 0 \leq i < m \leq n-1.$$

3. Si l'on suppose que $\nabla F(x_m) \neq 0$ pour tout $m \leq n-1$, quelle est la dimension de V_m ?
4. En déduire que l'algorithme précédent se termine en au plus n itérations.

3.2.2 Cas d'une fonctionnelle quadratique

Algorithme. On suppose désormais que

$$F(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle, \tag{14}$$

où $b, x \in \mathbb{R}^n$ et A est une matrice d'ordre n symétrique définie positive.
Soit $k \geq 1$. Supposant les $k+1$ vecteurs $x_0, x_1, \ldots, x_k$ déjà calculés à l'aide de l'algorithme précédent, on fait l'hypothèse que

$$\nabla F(x_m) \neq 0,\ 0 \leq m \leq k.$$

1. Remarquer en utilisant l'égalité $\langle \nabla F(x_{m+1}), \nabla F(x_m) \rangle = 0$ que $\tilde{d}_m = x_{m+1} - x_m \neq 0$ pour tout $m = 0, 1, \dots, k-1$
2. (a) Partant de l'égalité $\langle \nabla F(x_{m+1}), \nabla F(x_i) \rangle = 0$ pour tout $0 \le i < m \le k-1$, montrer ensuite que $\langle A\tilde{d}_m, \nabla F(x_i) \rangle = 0$.
   (b) Prouver alors que $\langle A\tilde{d}_m, \tilde{d}_p \rangle = 0$ pour chaque $0 \le p < m \le k-1$.
3. En déduire que les directions $\tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \dots, \tilde{d}_{k-1}$ sont linéairement indépendantes.
4. Posant $\tilde{d}_m = \sum_{i=0}^{m} \tilde{\alpha}_i^{(m)} \nabla F(x_i)$, $0 \le m \le k-1$, montrer que $\tilde{\alpha}_m^{(m)} \neq 0$.
5. En déduire que l'on peut écrire $x_{m+1} = x_m - \rho_m d_m$ où la direction de descente d_m est de la forme
$$d_m = \nabla F(x_m) + \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i^{(m)} \nabla F(x_i),$$
et ρ_m est défini de façon unique par l'égalité suivante :
$$F(x_m - \rho_m d_m) = \inf_{\rho \in \mathbb{R}} F(x_m - \rho d_m).$$
6. En remarquant que $0 = \langle A d_m, \tilde{d}_p \rangle = \langle d_m, \nabla F(x_{p+1}) - \nabla F(x_p) \rangle$, montrer que
$$\alpha_p^{(m)} = \frac{\|\nabla F(x_m)\|^2}{\|\nabla F(x_p)\|^2},\ 0 \le p < m \le k-1.$$
7. En déduire enfin la forme "pratique" de l'algorithme :
$$\begin{cases} d_0 = \nabla F(x_0) \\ d_m = \nabla F(x_m) + \frac{\|\nabla F(x_m)\|^2}{\|\nabla F(x_{m-1})\|^2} d_{m-1},\ 1 \le m \le k-1, \end{cases}$$
et
$$\rho_m = \frac{(\nabla F(x_m), d_m)}{(A d_m, d_m)},\ x_{m+1} = x_m - \rho_m d_m,\ 0 \le m \le k-1.$$

Convergence de la méthode. On considère toujours la fonctionnelle définie par (14) et l'on désigne par $x_0, x_1, \dots, x_n$ la suite des vecteurs fournis pas l'algorithme du gradient conjugué appliqué à F et par d_k la direction de descente à l'étape k. On rappelle que :
$$\langle \nabla F(x_k), \nabla F(x_i) \rangle = \langle \nabla F(x_k), d_i \rangle = \langle A d_k, d_i \rangle = 0,\ 0 \le i < k \le n.$$
On introduit ensuite l'*espace de Krylov* d'ordre $k \ge 1$:
$$\mathcal{K}_k = \text{vect}\{\nabla F(x_0), A\nabla F(x_0), \dots, A^{k-1} \nabla F(x_0)\}.$$

1. Vérifier que
$$\mathcal{K}_k = \text{vect}\{\nabla F(x_0), \nabla F(x_1), \dots, \nabla F(x_{k-1})\} = \text{vect}\{d_0, d_1, \dots, d_{k-1}\}.$$
2. Montrer ensuite que
$$\|e_k\|_A = \inf_{x \in x_0 + \mathcal{K}_k} \|x - A^{-1} b\|_A,$$
où $e_k = x_k - A^{-1} b$ et $\|y\|_A^2 = \langle Ay, y \rangle$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.

3. Retrouver alors que l'algorithme du gradient conjugué converge ici en au plus n itérations.
4. On pose $\mathcal{P}_k = \{p \in \mathbb{R}_k[X],\ p(0) = 1\}$ pour tout $0 \leq k \leq n$.
   (a) Montrer que $\|e_k\|_A \leq \inf_{p\in\mathcal{P}_k} \|p(A)e_0\|_A$.
   (b) En déduire que $\|e_k\|_A \leq \inf_{p\in\mathcal{P}_k} \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |p(\lambda)| \|e_0\|_A$.
   (c) Montrer que l'on peut choisir $p \in \mathcal{P}_n$ de telle sorte que $\|e_n\|_A = 0$, ce qui redémontre que l'algorithme du gradient conjugué converge ici en au plus n itérations.
   (d) $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ désignant une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A, montrer alors que
   $$\|e_k\|_A = 0,$$
   à condition que $b \in \mathrm{vect}\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ pour un certain entier $1 \leq k \leq n$.
5. Si $\sigma(A) \subset [\beta - 1, \beta + 1]$, $\beta > 1$, montrer que $\|e_k\|_A \leq \beta^{-k} \|A^{-1}b\|_A$.

4 Exercices

Exercice 1. Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $m > n$, telle que $\mathrm{rg}\, A = n$, $C \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, $p < n$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $d \in \mathbb{R}^p$. A Partir de la décomposition en valeurs singulières,
$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix} V_1^T,$$
on définit ensuite $A_1 = AV_1D^{-1}$ et $C_1 = CV_1D^{-1}$.

1. Montrer que $A_1^T A_1 + C_1^T C_1 = I$.
2. Décomposant $C_1 = Q\Sigma V_2^T$ en valeurs singulières, montrer qu'il existe deux matrices, P, orthogonale, et Δ, diagonale, telles que
$$P^T A_1 V_2 = \begin{pmatrix} \Delta \\ 0 \end{pmatrix}.$$
3. En déduire qu'il existe P et Q orthogonales et F inversible telles que
$$A = P \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} F^T \text{ et } C = Q \begin{pmatrix} \Omega & 0 \end{pmatrix} F^T.$$
4. Montrer enfin que le problème $\inf_{\{x\in\mathbb{R}^n, Cx=d\}} \|Ax - b\|_2$ a une unique solution.

Exercice 2. Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$, telle que $r = \mathrm{rg}\, A \leq n$. On note μ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, les valeurs singulières de A et l'on pose
$$B_\lambda = (A^T A + \lambda I)^{-1} A^T$$
pour des valeurs convenables de $\lambda > 0$.

1. Montrer que $\|B_\lambda - A^+\|_2 = \lambda/(\mu_r^2(\mu_r^2+\lambda))$
2. Etudier le comportement de B_λ quand λ tend vers 0.

Exercice 3. Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $m \geq n$. Posant $\mathrm{cond}A = \|A\|\|A^+\|$, montrer que $\mathrm{cond}_2\, B \geq \mathrm{cond}_2\, A$ où $B = Ay$ et $y \in \mathbb{R}^m$.

Exercice 4. Dans cet exercice $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien et $\|.\|$ la norme associée.
Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $m, n \geq 1$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\varepsilon > 0$, et

$$J_\varepsilon(x) = \|Ax - b\|^2 + \varepsilon\|x\|^2, x \in \mathbb{R}^n.$$

1. Donner l'expression de $M_\varepsilon \in M_n(\mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$J_\varepsilon(x) = 2\left[\frac{1}{2}\langle M_\varepsilon x, x\rangle - \langle c, x\rangle\right] + \|b\|^2,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

   Vérifier ensuite que M_ε est symétrique définie positive.
2. Montrer ensuite qu'il existe $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ unique tel que $J_\varepsilon(x_\varepsilon) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} J_\varepsilon(x)$ et que x_ε est caractérisé par l'équation

$$(A^TA + \varepsilon)x_\varepsilon = A^Tb.$$

3. Soit y tel que $A^TAy = A^Tb$.
   (a) Montrer que $A^TA(x_\varepsilon - y) + \varepsilon x_\varepsilon = 0$.
   (b) En évaluant le produit scalaire $\langle A^TA(x_\varepsilon - y) + \varepsilon x_\varepsilon, x_\varepsilon - y\rangle$, déduire de la question précédente que $\langle x_\varepsilon, x_\varepsilon - y\rangle \leq 0$.
   (c) Prouver enfin que $\|x_\varepsilon - y\| \leq \|y\|$ et $\|x_\varepsilon\| \leq \|y\|$.
   (d) En déduire que $Ax_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} Ay$.
4. Montrer à l'aide de 3(b) et 3(c) que toute valeur d'adhérence $\tilde{x}$ de la suite $(x_{\frac{1}{n}})_{n\geq 1}$ est un élément de norme minimale de $\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } A^TAz = A^Tb\}$. Interpréter ensuite ce résultat en terme de minimisation de la fonctionnelle J_0.
5. Montrer enfin que $x_{\frac{1}{n}} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tilde{x}$.

Exercice 5. Dans cet exercice $\langle .,. \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien et $\|.\|$ la norme associée.
Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$, une matrice symétrique définie positive dont les valeurs propres sont notées $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. On considère ensuite $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, définie par

$$J(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle - \langle b, v\rangle + c,$$

où $b \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$ ainsi que le problème d'optimisation suivant :

$$(\mathcal{P}) \qquad \text{Minimiser } J(v),\ v \in \mathbb{R}^n.$$

1. Rappeler pourquoi $(\mathcal{P})$ a une et une seule solution u qui est l'unique solution de l'équation $Ax = b$.

   Pour approximer u on utilise l'algorithme de gradient à pas optimal qui consiste à construire une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la manière itérative suivante :
   — initialisation : $u_0 \in \mathbb{R}^n$.
   — pour tout $k \geq 0$ tel que $\nabla J(u_k) \neq 0$, $u_{k+1} = u_k + t_k d_k$, où $d_k = -\nabla J(u_k)$ et t_k est l'unique réel (positif) minimisant $t \mapsto J(u_k + td_k)$ sur $\mathbb{R}$.
   Le but de cet exercice est d'estimer la vitesse de convergence de $(u_k)_k$ vers u.

2. Vérifier les relations suivantes pour tout $k \geq 0$:
$$\langle d_{k+1}, d_k\rangle = 0,\ d_{k+1} = d_k - t_k A d_k,\ t_k = \frac{\|d_k\|^2}{\langle Ad_k, d_k\rangle}.$$

3. Montrer ensuite que pour chaque $k \geq 0$,
$$J(u_{k+1}) = J(u_k) - \frac{1}{2}\frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle} \text{ et } 2(J(u_k) - J(u)) = \langle A^{-1}d_k, d_k\rangle.$$

4. En déduire (toujours sous l'hypothèse $\nabla J(u_k) \neq 0$), que
$$J(u_{k+1}) - J(u) = [J(u_k) - J(u)]\left[1 - \frac{\|d_k\|^4}{\langle Ad_k, d_k\rangle\langle A^{-1}d_k, d_k\rangle}\right],\ \forall k \geq 0.$$

5. En utilisant l'inégalité de Kantorovitch
$$1 \leq \frac{\langle Ax, x\rangle\langle A^{-1}x, x\rangle}{\|x\|^4} \leq \frac{(1 + \mathrm{cond}_2 A)^2}{4\mathrm{cond}_2 A},\ \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\},$$
   démontrer ensuite que
$$J(u_k) - J(u) \leq \left[\frac{\mathrm{cond}_2(A) - 1}{\mathrm{cond}_2(A) + 1}\right]^{2k} [J(u_0) - J(u)].$$

6. Montrer enfin que $2(J(u_k) - J(u)) \geq \lambda_1\|u_k - u\|^2$, puis que
$$\|u_k - u\| \leq \left[\frac{\mathrm{cond}_2(A) - 1}{\mathrm{cond}_2(A) + 1}\right]^{k} \left[\frac{2(J(u_0) - J(u))}{\lambda_1}\right]^{1/2}.$$