

Éléments de théorie spectrale

Table des matières

1	Rappels et compléments d'analyse linéaire	1
1.1	Notations	1
1.2	Réduction matricielle	2
1.3	Matrices hermitiennes	3
1.4	Norme matricielle	4
1.5	Perturbation de valeurs propres	5
2	Calcul de valeurs propres	6
2.1	Le cas symétrique	6
2.2	Cas général	7
3	Quelques exercices et problèmes	9
3.1	Sur la décomposition en valeurs singulières	9
3.2	Sur la notion de norme matricielle	10
3.3	Sur la méthode de Jacobi	12
3.4	Sur la méthode de Givens-Householder	14
3.5	Sur la méthode de la puissance	16
3.6	Sur la méthode QR	17
3.7	Rappels sur la factorisation QR d'une matrice	18

1 Rappels et compléments d'analyse linéaire

Dans cette section \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1.1 Notations

Adjoint. Tout vecteur $v \in \mathbb{K}^n$, $n \geq 1$, est défini par n scalaires $v_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$, et

sera représenté par le vecteur colonne : $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$. Le *vecteur adjoint* de v est alors le

vecteur ligne $v^* = (\overline{v_1}, \overline{v_2}, \dots, \overline{v_n})$ et le *vecteur transposé* de v est $v^T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$.

Structure hermitienne. L'application $(u, v) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \mapsto \langle u, v \rangle = v^* u = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i}$ est un produit scalaire sur \mathbb{C}^n appelé *produit scalaire hermitien*. De même $(u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \langle u, v \rangle = v^T u = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n appelé *produit scalaire euclidien*. On parle de produit scalaire canonique si \mathbb{K} n'est pas précisé. La norme $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$, $u \in \mathbb{K}^n$, qui dérive du produit scalaire canonique est appelée *norme hermitienne* ou *norme euclidienne* suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Orthogonalité. Deux vecteurs u et v de \mathbb{K}^n sont *orthogonaux* si $\langle u, v \rangle = 0$. Une famille $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ de $k \leq n$ vecteurs de \mathbb{K}^n est dite *orthonormale* si $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, k$. Un système orthonormal de $k = n$ vecteurs est une *base orthonormale* de \mathbb{K}^n .

Matrice adjointe. Soit $M_{m,n}(\mathbb{K})$ l'anneau des matrices $m \geq 1$ lignes et $n \geq 1$ colonnes à coefficients dans \mathbb{K} . La *matrice adjointe* de $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ est l'unique matrice $A^* \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ satisfaisant

$$\langle Au, v \rangle_m = \langle u, A^*v \rangle_n, \quad \forall u \in \mathbb{C}^m, \quad \forall v \in \mathbb{C}^n.$$

Ceci entraîne $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$ pour tout $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$. La *matrice transposée* A^T de $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est définie pour chaque $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$ par $(A^T)_{ij} = A_{ji}$. Elle vérifie évidemment

$$\langle Au, v \rangle_m = \langle u, A^T v \rangle_n, \quad \forall u \in \mathbb{R}^m, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 1. Pour tout $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ et $B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$, $m, n, p \geq 1$, montrer que :

- (i) $(AB)^* = B^*A^*$.
- (ii) si A est inversible alors A^* est inversible et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Si $m = n$ on note $M_n(\mathbb{K})$ l'anneau des matrices (carrées) de taille n .

Matrices particulières. Une matrice carrée A est dite :

- (a) *symétrique* si A est réelle et $A^T = A$.
- (b) *hermitienne* si $A^* = A$.
- (c) *normale* si $A^*A = AA^*$.
- (d) *orthogonale* si A est réelle et $A^T A = AA^T = I$.
- (e) *unitaire* si $A^*A = AA^* = I$.

Exercice 2. Justifier la caractérisation suivante des matrices unitaires :

$$\begin{aligned} U^*U = UU^* = I &\iff \langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \\ &\iff U(\text{b.o.n.}) = \text{b.o.n.} \end{aligned}$$

Spectre. Le *spectre* de $A \in M_n(\mathbb{K})$, $n \geq 1$, est l'ensemble des valeurs propres de A :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K}, A - \lambda I \text{ singulière}\}.$$

Le *rayon spectral* de A est le plus grand des modules des valeurs propres de A :

$$\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}.$$

1.2 Réduction matricielle

Matrices carrées. Les matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

Théorème 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

- (a) Il existe $U \in M_n(\mathbb{C})$ unitaire telle que $U^{-1}AU$ est triangulaire.
- (b) Si A est normale, il existe $U \in M_n(\mathbb{C})$ unitaire telle que $U^{-1}AU$ est diagonale.
- (c) Si A est symétrique, il existe $\mathcal{O} \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale telle que $\mathcal{O}^{-1}A\mathcal{O}$ est diagonale.

Décomposition en valeurs singulières. Les matrices A et B de $M_{m,n}(\mathbb{K})$ sont dites *équivalentes* s'il existe $Q \in M_m(\mathbb{K})$ et $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversibles telles que $B = QAP$. Pour tout $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, $A^*A \in M_n(\mathbb{C})$ est hermitienne et positive de sorte qu'il existe n réels positifs (pas forcément distincts) μ_i , $i = 1, \dots, n$, tels que

$$\sigma(A^*A) = \{\mu_i^2, 1 \leq i \leq n\}.$$

Autrement dit les valeurs singulières de A sont les racines carrées des valeurs propres de A^*A .

Exercice 3. Montrer qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si ses valeurs singulières sont > 0 .

Théorème 2. Pour tout $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ où $m \geq n$, il existe deux matrices unitaires $U \in M_m(\mathbb{C})$ et $V \in M_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A = U\Sigma V^*, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \mu_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

les μ_i étant les valeurs singulières de A .

1.3 Matrices hermitiennes

Décomposition spectrale. Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ est hermitienne alors il existe n réels $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ tels que

$$\sigma(A) = \{\lambda_i, 1 \leq i \leq n\},$$

ainsi qu'une b.o.n. $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de \mathbb{C}^n formée de vecteurs propres de A :

$$Av_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Quotient de Rayleigh. Le *quotient de Rayleigh* de $A \in M_n(\mathbb{C})$ est l'application :

$$R_A: \mathbb{C}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \\ v \mapsto \frac{\langle Av, v \rangle}{\langle v, v \rangle}.$$

Si $A = A^*$ alors $R_A(v) \in \mathbb{R}$ pour tout $v \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ et l'on dispose alors du *principe du min-max* :

Théorème 3. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne dont les valeurs propres sont $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. On note $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ une b.o.n. de vecteurs propres associés ($Av_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, 2, \dots, n$), et l'on pose :

$$V_0 = \{0\} \text{ puis } V_k = \text{vect}\{v_1, \dots, v_k\} \text{ et } \mathcal{V}_k = \{\text{sev de dim } k \text{ de } \mathbb{C}^n\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Alors, pour tout $k = 1, \dots, n$, on a :

- (i) $\lambda_k = R_A(v_k) = \max_{u \in V_k} R_A(u) = \min_{u \in V_{k-1}^\perp} R_A(u)$.
- (ii) $\lambda_k = \min_{W \in \mathcal{V}_k} \max_{w \in W} R_A(w)$.
- (iii) $\lambda_k = \max_{W \in \mathcal{V}_{k-1}} \min_{w \in W^\perp} R_A(w)$.

Positivité. Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ supposée hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, est dite *positive* si elle vérifie

$$\langle Av, v \rangle \geq 0, \quad \forall v \in \mathbb{K}^n,$$

ce qui se note $A \geq 0$. Elle est dite *définie positive* si elle satisfait de plus l'implication :

$$\forall v \in \mathbb{K}^n, \langle Av, v \rangle = 0 \implies v = 0, ;$$

et l'on écrit alors $A > 0$.

Proposition 4. Si A est hermitienne alors :

(i) $A \geq 0 \iff \sigma(A) \subset \mathbb{R}_+$.

(ii) $A > 0 \iff \sigma(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

1.4 Norme matricielle

Norme vectorielle. Une norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{K}^n , $n \geq 1$, est une application de \mathbb{K}^n dans \mathbb{R}_+ satisfaisant les trois axiomes suivants :

(i) $\|v\| = 0 \iff v = 0$.

(ii) $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, v \in \mathbb{K}^n$.

(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \quad \forall u, v \in \mathbb{K}^n$.

Pour tout $p \geq 1$, $\|v\|_p = (\sum_{i=1}^n |v_i|^p)^{1/p}$ définit une norme appelée *norme p* sur \mathbb{K}^n . Si $p = 2$ il s'agit évidemment de la norme euclidienne ou hermitienne suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. De même $\|v\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |v_i|$, est une norme appelée *norme infinie*. Elle peut être vue comme la limite des normes p en ce sens que $\|v\|_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} \|v\|_p, \quad \forall v \in \mathbb{K}^n$. A toutes fins utiles rappelons l'*inégalité de Hölder*

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \|u\|_p \|v\|_q, \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

qui, dans le cas particulier où $p = 2$, est appelée *inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \|u\|_2 \|v\|_2.$$

Norme matricielle. Une *norme matricielle* sur $M_n(\mathbb{K})$ est une norme vectorielle sur \mathbb{K}^{n^2} qui est continue pour le produit matriciel, en ce sens qu'elle vérifie la condition supplémentaire suivante :

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{K}).$$

Norme matricielle induite. Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle sur \mathbb{K}^n . Pour tout $A \in M_n(\mathbb{K})$ la quantité

$$\|A\| = \sup_{v \in \mathbb{K}^n - \{0\}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} = \sup_{v \in \mathbb{K}^n - \{0\}, \|v\| \leq 1} \|Av\| = \sup_{v \in \mathbb{K}^n, \|v\|=1} \|Av\|.$$

s'appelle *norme induite par $\|\cdot\|$* de A (on parle aussi de norme subordonnée à $\|\cdot\|$). C'est une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{K})$, qui vérifie entre autres propriétés immédiates :

- (a) $\|Av\| \leq \|A\|\|v\|, \forall v \in \mathbb{K}^n$.
- (b) $\|A\| = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+, \|Av\| \leq \alpha\|v\|, \forall v \in \mathbb{K}^n\}$.
- (c) $\exists u \in \mathbb{K}^n - \{0\}, \|Au\| = \|A\|\|u\|$.

Dans le cas particulier où $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p$ et $p = 1, 2, \infty$, il est possible de donner une expression explicite de la norme induite associée :

Proposition 5. Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{K}), n \geq 1$, alors :

- (i) $\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.
- (ii) $\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^*A)} = \sqrt{\rho(AA^*)} = \|A^*\|_2$.
- (iii) $\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$.

De plus $\|\cdot\|_2$ est unitairement invariante :

$$\|AU\|_2 = \|UA\|_2 = \|U^*AU\|_2 = \|A\|_2, \forall U \in M_n(\mathbb{K}) \text{ unitaire.}$$

Remarque 6. Si A est normale alors $\rho(A^*A) = \rho(A)^2$ donc $\|A\|_2 = \rho(A)$.

Exercice 4. Montrer que la norme de Frobenius

$$\|A\|_F = \left(\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

est une norme matricielle sur $M_n(\mathbb{K})$ qui si $n \geq 2$ n'est induite par aucune norme sur \mathbb{K}^n .

1.5 Perturbation de valeurs propres

Conditionnement. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{C}^n, n \geq 1$. On note encore $\|\cdot\|$ la norme matricielle induite correspondante. Le *conditionnement* d'une matrice inversible $A \in M_n(\mathbb{K})$ associé à la norme $\|\cdot\|$ est défini par le produit :

$$\text{cond } A = \|A\|\|A^{-1}\| \geq 1.$$

Proposition 7. Si $A \in M_n(\mathbb{C}), n \geq 1$, est inversible, on a :

- (a) $\text{cond}_2 A = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \frac{\mu_n}{\mu_1}$ où $\mu_1 > 0$ (resp. $\mu_n > 0$) est la plus petite (resp. la plus grande) valeur singulière de A .
- (b) Si A est normale, $\text{cond}_2 A = \frac{\rho(A)}{\min_{i=1, \dots, n} |\lambda_i|}$ où $\sigma(A) = \{\lambda_i, i = 1, \dots, n\}$.

Exercice 5. Si $A \in M_n(\mathbb{C}), n \geq 1$, est inversible, vérifier que :

- (a) $\text{cond}(\alpha A) = \text{cond } A$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$.
- (b) $\text{cond}_2 U = 1$ et $\text{cond}_2 A = \text{cond}_2(AU) = \text{cond}_2(UA) = \text{cond}_2(U^*AU)$ si U est unitaire.

Un peu de théorie perturbative. Il est possible sous certaines conditions de contrôler la variation du spectre d'une matrice de référence A , induite par la modification ΔA de ses éléments.

(a) **Cas général.** Le résultat principal est le théorème de Bauer-Fike :

Théorème 8. Soient $A \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$, une matrice diagonalisable : $P^{-1}AP = D = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$, et $\|\cdot\|$ une norme matricielle induite. Alors pour toute matrice $\Delta A \in M_n(\mathbb{C})$ on a

$$\sigma(A + \Delta A) \subset \cup_{i=1}^n \Delta_i, \quad \Delta_i = \{z \in \mathbb{C}, |z - \lambda_i| \leq (\text{cond } P)\|\Delta A\|\}.$$

(b) **Cas hermitien.** Si la matrice de référence A et sa perturbation ΔA sont toutes deux hermitiennes, on dispose d'un résultat un peu plus précis :

Théorème 9. Soient $A, \Delta A \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$, deux matrices hermitiennes. Notant $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n$ celles de $A + \Delta A$, on a :

$$|\beta_i - \lambda_i| \leq \|\Delta A\|_2, \quad i = 1, \dots, n.$$

2 Calcul de valeurs propres

2.1 Le cas symétrique

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$, une matrice symétrique dont les valeurs propres sont notées $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Méthode de Jacobi.

(a) *Valeurs propres.* Il existe $(O_k)_{k \in \mathbb{N}}$ suite de matrices orthogonales telle que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} O_k^T A O_k = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}.$$

(b) *Vecteurs propres.* Si les valeurs propres de A sont de plus 2 à 2 distinctes, la suite de matrices $(O_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice O dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est un vecteur propre de A associé à λ_i .

Méthode de Givens-Householder.

(a) *Réduction.* Il existe une matrice P orthogonale (obtenue comme produit de $n - 2$ matrices de Householder) telle que

$$P^T A P = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{i-2} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & b_n \end{pmatrix}, \quad b_i \in \mathbb{R}, \quad c_j \in \mathbb{R}^*.$$

- (b) *Bissection*. Pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, on définit la famille de polynômes p_i à l'aide de la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_1(x) = b_1 - x \\ p_i(x) = (b_i - x)p_{i-1}(x) - c_{i-1}^2 p_{i-2}(x) \text{ si } 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

En fait, p_i est simplement le polynôme caractéristique de la matrice B_i :

$$p_i(x) = \det(B_i - xI_i), \quad B_i = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{i-2} & b_{i-1} & c_{i-1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{i-1} & b_i \end{pmatrix}.$$

Alors, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, le nombre $N_i(\mu)$ de racines de p_i qui sont $< \mu$ est égal au nombre de changements de signes dans la suite $(1, p_1(\mu), \dots, p_n(\mu))$.

- (c) *Dichotomie*. Partant de l'encadrement $a_0 \leq \lambda_i \leq b_0$ (on sait que $-a_0 = b_0 = \|B_n\|_1$ conviennent), il suffit de calculer $c_0 = (a_0 + b_0)/2$ puis $N_n(c_0)$ à l'aide du (b) :

- (i) si $N_n(c_0) \geq i$ alors $\lambda_i \in [a_0, c_0[$
- (ii) si $N_n(c_0) < i$ alors $\lambda_i \in [c_0, b_0]$.

2.2 Cas général

Méthode de la puissance. On suppose que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable et qu'elle possède une unique valeur propre λ_1 de module maximal :

$$\forall \lambda \in \sigma(A) - \{\lambda_1\}, \quad |\lambda| < \rho(A) = |\lambda_1|.$$

Soit $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ une base de \mathbb{C}^n vecteurs propres de A : $Ap_i = \lambda_i p_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

- (a) *Résultat*. Pour tout $u_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i$ tel que $\alpha_1 \neq 0$, la suite récurrente suivante

$$u_{k+1} = Au_k, \quad k \geq 0,$$

permet de calculer λ_1 ainsi qu'un vecteur propre associé :

- (i) Pour tout $w \in \mathbb{C}^n$ tel que $w^* p_1 \neq 0$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{w^* Au_k}{w^* u_k} = \lambda_1.$$

- (ii) La suite $\left(\left(\frac{|\lambda_1|}{\lambda_1} \right)^k \frac{u_k}{\|u_k\|} \right)_k$ converge vers un vecteur non nul de $\ker(A - \lambda_1 I)$.

- (b) *Généralisation au cas d'une valeur propre λ_1 de multiplicité $p > 1$* . Si l'un au moins des coefficients α_i , $i = 1, 2, \dots, p$, est non nul alors (ii) reste vrai. Et si l'on suppose de plus que $w^* (\sum_{i=1}^p \alpha_i p_i) \neq 0$ alors (i) est conservé.

- (c) *Facteur de convergence.* Les données u_0 et w vérifiant les hypothèses du (b) on pose $s_k = \frac{w^* A u_k}{w^* u_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Le facteur de convergence c pour la suite $s = (s_k)_k$ de limite λ_1 d'après ce qui précède, est :

$$c(s) := \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|s_k - s_{k-1}|}{|s_{k+1} - s_k|} = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_{p+1}|}.$$

- (d) *Déflation.* On suppose A diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. On note v_i un vecteur propre associé à λ_i : $Av_i = \lambda_i v_i$. Sans restreindre la généralité de la méthode, on peut choisir la première composante de v_i égale à 1 : $(v_i)_1 = 1$. Notant $a = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ la première ligne de A , on a

$$(Av_i)_1 = \lambda_i (v_i)_1 \iff a^T v_i = \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

de sorte que la matrice

$$B = A - v_1 a^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & \tilde{B} & & \\ * & & & \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} \in M_{n-1}(\mathbb{R}),$$

satisfait :

$$Bv_1 = 0 \text{ et } Bw_i = \lambda_i w_i \text{ pour } w_i = v_i - v_1, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Par définition $w_i = \begin{pmatrix} 0 \\ u_i \end{pmatrix}$ où $u_i \in \mathbb{R}^{n-1}$, donc $Bw_i = \lambda_i w_i \iff \tilde{B}u_i = \lambda_i u_i$ pour $i = 2, \dots, n$, ce qui montre que l'on s'est ramené à un nouveau problème de valeurs propres sur la matrice \tilde{B} d'ordre $n - 1$ avec :

$$\sigma(\tilde{B}) = \sigma(A) - \{\lambda_1\}.$$

De plus les vecteurs propres de A s'obtiennent à partir de ceux de \tilde{B} par "translation".

- (e) *Méthode de la puissance inverse.* Ici $A \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$, désigne encore une matrice diagonalisable, et $\delta \in \sigma(A)$. Afin de calculer δ (qui est supposé déjà grossièrement localisé), on choisit $\mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$0 < |\mu - \delta| < d(\mu, \sigma(A) - \{\delta\}) = \min_{\lambda \in \sigma(A) - \{\delta\}} |\mu - \lambda|.$$

Ainsi, $\mu \in \mathbb{C} - \sigma(A)$ (appelé *ensemble résolvant de A*) et

$$|(\delta - \mu)^{-1}| = \rho((A - \mu)^{-1}) > |\lambda|, \quad \forall \lambda \in \sigma((A - \mu)^{-1}) - \{(\delta - \mu)^{-1}\}.$$

La méthode de la puissance inverse est simplement la méthode de la puissance appliquée au cas de la matrice $(A - \mu)^{-1}$ (appelée *résolvante de A au point μ*). Pour un vecteur u_0 convenablement choisi, on définit donc la suite récurrente :

$$(A - \mu I)u_{k+1} = u_k, \quad k \geq 0.$$

Le facteur de convergence de la méthode est :

$$\frac{|(\delta - \mu)^{-1}|}{\max_{\lambda \in \sigma(A), \lambda \neq \delta} |(\lambda - \mu)^{-1}|} = \frac{\min_{\lambda \in \sigma(A), \lambda \neq \delta} |\lambda - \mu|}{|\delta - \mu|}.$$

Méthode QR. On rappelle qu'étant donnée une matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, il existe une matrice Q unitaire ainsi qu'une matrice R triangulaire supérieure telles que $A = QR$. De plus il est possible de choisir les coefficients diagonaux de R tous ≥ 0 . Dans ce cas la décomposition QR précédente est unique si A est inversible.

Supposant A inversible, on peut donc définir la suite matricielle $(A_k)_k$ comme suit : partant de l'unique factorisation $Q_1 R_1$ de $A_1 = A$ telle que $(R_1)_{ii} > 0$, on définit $A_2 = R_1 Q_1$. On factorise ensuite A_2 de façon unique sous la forme $Q_2 R_2$, puis l'on définit $A_3 = R_2 Q_2$. Et ainsi de suite : à l'étape $k \geq 1$, on définit $A_{k+1} = R_k Q_k$ à partir de l'unique factorisation $Q_k R_k$ de A_k telle que $(R_k)_{ii} > 0$.

La suite $(A_k)_k$ ainsi construite est telle que :

$$(A_k)_{ii} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \lambda_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

à condition que les deux hypothèses supplémentaires suivantes soient satisfaites :

1. La matrice A a toutes ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de modules différents, de sorte qu'elle est diagonalisable : il existe P inversible telle que

$$P^{-1}AP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n);$$

2. La matrice de passage P^{-1} admet une décomposition LU .

3 Quelques exercices et problèmes

3.1 Sur la décomposition en valeurs singulières

Exercice 6. A désignant une matrice de $M_{m,n}(\mathbb{C})$ où $m \geq n$, on rappelle qu'il existe deux matrices unitaires $U \in M_m(\mathbb{C})$ et $V \in M_n(\mathbb{C})$ telles que

$$A = U \Sigma V^*, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \mu_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, $u_i \in \mathbb{C}^m$, $1 \leq i \leq m$, désigne la $i^{\text{ième}}$ colonne de la matrice U et $v_k \in \mathbb{C}^n$, $1 \leq k \leq n$, la $k^{\text{ième}}$ colonne de V . On note $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de \mathbb{C}^n et $(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq m}$ celle de \mathbb{C}^m .

1. Montrer que $V^* = \sum_{i=1}^n e_i v_i^*$, $\Sigma V^* = \sum_{i=1}^n \mu_i \epsilon_i v_i^*$ et $A = \sum_{i=1}^n \mu_i u_i v_i^*$.
2. Montrer que $A^* A = \sum_{i=1}^n \mu_i^2 v_i v_i^*$.
3. Supposant que $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > \mu_{r+1} = \dots = \mu_n = 0$, $r \geq 1$, en déduire que
 - (a) $\ker A = \ker A^* A = \text{vect}\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$
 - (b) $\text{Im } A = \text{vect}\{u_1, \dots, u_r\}$
 - (c) $\text{Im } A^* = \text{vect}\{v_1, \dots, v_r\} = (\ker A)^\perp$.

Exercice 7. (Pseudo-inverse). Soient $m \geq n \geq r \geq 1$ et $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle *pseudo-inverse* de

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \mu_r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R}),$$

la matrice de $M_{n,m}(\mathbb{R})$ suivante :

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \mu_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \mu_r^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit maintenant $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ dont la décomposition en valeurs singulières s'écrit $A = U\Sigma V^*$. Alors la pseudo-inverse de A est définie par :

$$A^+ = V\Sigma^+U^* \in M_{n,m}(\mathbb{C}).$$

En particulier si A est inversible alors $m = n = r$ et l'on voit que $AA^+ = A^+A = I_n$, ce qui montre que $A^+ = A^{-1}$: A^+ est donc une généralisation de A^{-1} .

Avec les notations précédentes, montrer que :

1. $\Sigma^+U^* = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-1} e_i u_i^*$, puis que $A^+ = \sum_{i=1}^r \mu_i^{-1} v_i u_i^*$.
2. $AA^+ = \sum_{i=1}^r u_i u_i^*$; En déduire que AA^+ est la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Im } A$.
3. $A^+A = \sum_{i=1}^r v_i v_i^*$; En déduire que A^+A est la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Im } A^*$.

3.2 Sur la notion de norme matricielle

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$

Exercice 8. (Norme matricielle et rayon spectral).

1. Montrer que pour toute norme matricielle $\|\cdot\|$ (induite ou non), on a $\rho(A) \leq \|A\|$.
Indication : Remarquer que pour tout $u \in \mathbb{C}^n - \{0\}$, la matrice uv^* , où v est le vecteur de \mathbb{C}^n dont tous les éléments valent 1, est non nulle, puis utiliser la continuité du produit matriciel.

2. Soient $\delta > 0$ et D_δ la matrice diagonale de taille n telle que $(D_\delta)_{i,i} = \delta^{i-1}$. On rappelle que A est unitairement semblable à une matrice triangulaire T (supérieure pour fixer les idées) : il existe U unitaire telle que $U^*AU = T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. On pose alors $U_\delta = UD_\delta$, puis l'on définit la norme suivante :

$$\|A\|_\delta = \|U_\delta^{-1}AU_\delta\|_\infty.$$

- Montrer que $\|\cdot\|_\delta$ est la norme matricielle induite par la norme vectorielle $\|U_\delta^{-1}v\|_\infty$.
- Calculer $U_\delta^{-1}AU_\delta$ puis $\|A\|_\delta$ en fonction de δ , des valeurs propres de A et des éléments de la matrice T .
- Etant donné $\epsilon > 0$, montrer que l'on peut choisir $\delta > 0$ pour que $\|A\|_\delta \leq \rho(A) + \epsilon$.

Exercice 9. (Convergence d'une suite de matrices). Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- $A^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
- Quel que soit $v \in \mathbb{C}^n$, $A^n v \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
- $\rho(A) < 1$
- Il existe une norme matricielle induite $\|\cdot\|$ telle que $\|A\| < 1$.

Indication : Utiliser l'exercice précédent pour montrer l'implication (iii) \implies (iv).

Exercice 10. (Inversibilité). Montrer que :

- Si $I_n - A$ est singulière, alors $\|A\| \geq 1$ pour toute norme matricielle $\|\cdot\|$.
- Si $\|A\| < 1$ pour une norme matricielle induite $\|\cdot\|$, alors $I_n - A$ est inversible et $\|(I_n - A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$.

Exercice 11. (Conditionnement et perturbation d'un système linéaire). On suppose la matrice A inversible et l'on se donne $b \neq 0$ et Δb dans \mathbb{C}^n . Dans la suite de cet exercice, $u = A^{-1}b$ et $\|\cdot\|$ désigne une norme matricielle induite.

1. *Perturbation du second membre b .*

- Posant $\Delta u = A^{-1}\Delta b$, montrer que $\frac{\|\Delta u\|}{\|u\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$.
- Montrer que l'inégalité précédente est optimale, c'est-à-dire qu'il existe b et Δb non nuls pour lesquels cette inégalité devient une égalité.

2. *Perturbation de la matrice A .*

- On considère une matrice $\Delta A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que l'équation $(A + \Delta A)x = b$ possède au moins une solution, notée $u + \Delta u$. Montrer que $\frac{\|\Delta u\|}{\|u + \Delta u\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$.
- Montrer que l'inégalité précédente est optimale, c'est-à-dire qu'il existe b et ΔA non nuls pour lesquels cette inégalité peut être remplacée par une égalité.

1. Montrer que :

$$\begin{cases} b_{ij} = a_{ij} & \text{si } i \neq p, q \text{ et } j \neq p, q \\ b_{pj} = ca_{pj} - sa_{qj} & \text{si } j \neq p, q \\ b_{qj} = sa_{pj} + ca_{qj} & \text{si } j \neq p, q \\ b_{pp} = c^2 a_{pp} + s^2 a_{qq} - 2csa_{pq} \\ b_{qq} = s^2 a_{pp} + c^2 a_{qq} + 2csa_{pq} \\ b_{pq} = (c^2 - s^2)a_{pq} + cs(a_{pp} - a_{qq}). \end{cases}$$

2. On suppose $a_{pq} \neq 0$ et l'on cherche à déterminer θ (donc c et s) tel que $b_{pq} = 0$.

(a) Montrer que dans ce cas ($b_{pq} = 0$) on a nécessairement $c \neq 0$.

(b) En déduire que $t = s/c$ est alors solution de l'équation :

$$t^2 + 2\chi t - 1 = 0, \text{ où } \chi = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}.$$

(c) Prouver enfin qu'il existe $\theta \in] -\pi/4, 0[\cup] 0, \pi/4[$ unique, tel que $b_{pq} = 0$.

Méthode de Jacobi classique. L'idée est de diagonaliser A par une suite (infinie) de transformations semblables orthogonales :

$$\begin{cases} A_1 = A \\ A_{k+1} = R_k^T A_k R_k, \quad k \geq 1, \end{cases}$$

où R_k est une matrice de rotation élémentaire choisie pour annuler un élément non diagonal de A_k . Dans la méthode décrite ici, appelée méthode de Jacobi classique, on choisit un élément de plus grand module. Plus précisément, pour chaque matrice $A_k = (a_{ij}^{(k)})_{1 \leq i, j \leq n}$, on détermine les entiers $1 \leq p_k < q_k \leq n$ pour lesquels

$$|a_{p_k q_k}^{(k)}| = \max_{1 \leq i \neq j \leq n} |a_{ij}^{(k)}|,$$

puis on ajuste $\theta_k \in] -\pi/4, \pi/4[$ de sorte que $a_{p_k q_k}^{(k+1)} = 0$ avec $R_k = R(p_k, q_k, \theta_k)$. Afin d'éviter les situations triviales, on peut supposer $a_{p_k q_k}^{(k)} \neq 0$.

En notant p (resp. q) à la place de p_k (resp. q_k), montrer que :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} & \text{si } i \neq p, q \text{ et } j \neq p, q \\ a_{pj}^{(k+1)} = ca_{pj}^{(k)} - sa_{qj}^{(k)} & \text{si } j \neq p, q \\ a_{qj}^{(k+1)} = sa_{pj}^{(k)} + ca_{qj}^{(k)} & \text{si } j \neq p, q \\ a_{pp}^{(k+1)} = a_{pp}^{(k)} - ta_{pq}^{(k)} \\ a_{qq}^{(k+1)} = a_{qq}^{(k)} + ta_{pq}^{(k)}. \end{cases}$$

Convergence de la méthode. On va montrer dans ce qui suit qu'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{ii}^{(k)} = \lambda_{\sigma(i)}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

les λ_i désignant les valeurs propres de A .

1. On pose $D_k = \text{diag}(a_{ii}^{(k)})$ puis $E_k = A_k - D_k$ pour tout $k \geq 1$.
 - (a) En remarquant que $\|A_{k+1}\|_S = \|A_k\|_S$ (où $\|\cdot\|_S$ désigne la norme de Schur), montrer que $\|E_{k+1}\|_S^2 = \|E_k\|_S^2 - 2|a_{p_k q_k}^{(k)}|^2$.
 - (b) En déduire que

$$\|E_k\|_S^2 \leq \left(1 - \frac{2}{(n^2 - n)}\right)^{k-1} \|E_1\|_S^2,$$
 pour tout $k \geq 1$, et donc que E_k tend vers la matrice nulle quand $k \rightarrow +\infty$.
2. (a) Montrer que la suite (D_k) est bornée.
 - (b) Soit $(D_{\varphi(k)})_k$ une suite extraite de $(D_k)_k$ convergeant vers D (forcément diagonale!).
 - (i) Montrer que A et D ont même polynôme caractéristique puis qu'il existe une permutation σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ telle que

$$D = \text{diag}(\lambda_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq n}.$$
 - (ii) En déduire que la suite $(D_k)_k$ n'a qu'un nombre fini de valeurs d'adhérence.
 - (c) Montrer que $D_{k+1} - D_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$.
 - (d) Prouver finalement à l'aide de (a),(b)(ii) et (c) que $D_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} D$.

3.4 Sur la méthode de Givens-Householder

La méthode se décompose en deux phases principales : une phase de réduction à la forme tridiagonale (méthode de Householder) et une phase dite "de bissection" (méthode de Givens).

Tridiagonalisation d'une matrice symétrique (Householder).

1. Soit $w \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$. Vérifier que la matrice de Householder

$$H_w^{(p)} = I - 2 \frac{ww^T}{\|w\|^2},$$

où $\|w\|$ désigne la norme euclidienne de w , est symétrique et orthogonale.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $p \geq 1$, on pose

$$u_{\mp} = x \mp \|x\|e_1, \text{ où } x = \sum_{i=1}^p x_i e_i,$$

la famille $\{e_1, e_2, \dots, e_p\}$ désignant la base canonique de \mathbb{R}^p . En remarquant que $\|u_{\mp}\|^2 = 2(\|x\|^2 \mp \|x\|x_1)$, montrer que $H_{u_{\mp}}^{(p)}x = \pm\|x\|e_1$.

3. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$, une matrice symétrique.

(a) Soient $c = (a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1})^T \in \mathbb{R}^{n-1}$ et

$$O_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & H_{c \mp \|c\| e_1}^{(n-1)} & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

Montrer que $A_1 = O_1^T A O_1$ est de la forme :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & \pm\|c\| & 0 & \dots & 0 \\ \pm\|c\| & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & A' & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \text{ avec } A' = (a'_{ij})_{1 \leq i, j \leq n-1} = (A')^T \in M_{n-1}(\mathbb{R}).$$

(b) Si $c' = (a'_{21}, a'_{31}, \dots, a'_{(n-1)1})^T \in \mathbb{R}^{n-2}$ et

$$O_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & H_{c' \mp \|c'\| e_1}^{(n-2)} & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix},$$

montrer que $(O_1 O_2)^T A O_1 O_2$ est de la forme :

$$A_2 = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & A'' & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \end{pmatrix} \text{ avec } A'' = (A'')^T \in M_{n-2}(\mathbb{R}).$$

(c) En déduire qu'il existe une matrice orthogonale O telle que $O^T A O$ est tridiagonale.

Méthode de bisection (Givens). Pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, on pose

$$B_i = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & c_{i-2} & b_{i-1} & c_{i-1} \\ 0 & \dots & 0 & c_{i-1} & b_i \end{pmatrix}, \quad b_i \in \mathbb{R}, \quad c_j \in \mathbb{R}^*, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

On définit ensuite les polynômes p_i , $i = 0, 1, \dots, n$, par les formules de récurrence :

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_1(x) = b_1 - x \\ p_i(x) = (b_i - x)p_{i-1}(x) - c_{i-1}^2 p_{i-2}(x) \text{ si } 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Démontrer que :

1. p_i est le polynôme caractéristique de la matrice B_i , $1 \leq i \leq n$.
2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} p_i(x) = +\infty$, $1 \leq i \leq n$.
3. $p_i(t) = 0 \implies p_{i-1}(t)p_{i+1}(t) < 0$, $1 \leq i \leq n-1$.
4. p_i a i racines réelles distinctes $x_1^{(i)} < x_2^{(i)} < \dots < x_i^{(i)}$, $1 \leq i \leq n$.
5. $x_j^{(i+1)} < x_j^{(i)} < x_{j+1}^{(i+1)}$, $1 \leq i, j \leq n-1$.
6. Le nombre de racines de $p_i < \mu \in \mathbb{R}$ est le nombre de changements de signes dans la suite $(1, p_1(\mu), \dots, p_i(\mu))$.

3.5 Sur la méthode de la puissance

Calcul de la valeur propre de module maximum. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$, une matrice diagonalisable. On suppose que A possède une unique valeur propre de module maximal, notée λ_1 :

$$\forall \lambda \in \sigma(A), \lambda \neq \lambda_1 \implies |\lambda| < \rho(A) = |\lambda_1|.$$

Pour tout $u_0 \notin \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A) - \{\lambda_1\}} \ker(A - \lambda I)$, on définit la suite récurrente :

$$u_{k+1} = Au_k, \quad k \geq 0.$$

1. On suppose pour commencer que λ_1 est simple.
 - (a) Montrer que la suite $\left(\left(\frac{\bar{\lambda}_1}{|\lambda_1|} \right)^k \frac{u_k}{\|u_k\|} \right)_k$ converge vers un vecteur non nul de $\ker(A - \lambda_1 I)$.
 - (b) Montrer pour tout w qui n'est pas orthogonal à la projection de u_0 sur $\ker(A - \lambda_1 I)$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{w^* Au_k}{w^* u_k} = \lambda_1.$$

2. Etendre les résultats du 1. au cas où λ_1 est une valeur propre multiple.

Méthode de la puissance inverse. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 1$, une matrice diagonalisable, et $\delta \in \sigma(A)$. On choisit ensuite $\mathbb{C} \ni \mu \neq \delta$ tel que

$$|\mu - \delta| < d(\mu, \sigma(A) - \{\delta\}) = \min_{\lambda \in \sigma(A) - \{\delta\}} |\mu - \lambda|.$$

Pour un vecteur $u_0 \notin \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A) - \{\delta\}} \ker(A - \lambda I)$, on définit ensuite la suite récurrente :

$$(A - \mu I)u_{k+1} = u_k, \quad k \geq 0.$$

Expliquer pourquoi la suite $(u_k)_k$ est bien définie puis montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(\delta - \mu)^k}{|\delta - \mu|^k} \frac{u_k}{\|u_k\|} \in \ker(A - \delta I) - \{0\}.$$

3.6 Sur la méthode QR

Résultats préliminaires.

1. Montrer que toute matrice unitaire et triangulaire (supposée supérieure pour fixer les idées) est forcément de la forme $\text{diag}(d_i)_{1 \leq i \leq n}$ où $|d_i| = 1$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$.
2. En déduire que si $Q_1 R_1$ et $Q_2 R_2$ désignent deux décompositions QR d'une matrice $A \in GL_n(\mathbb{C})$ ($n \geq 1$), alors il existe $D = \text{diag}(d_i)_{1 \leq i \leq n}$ avec $|d_i| = 1$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, telle que

$$\begin{cases} Q_2 &= Q_1 D \\ R_2 &= D^{-1} R_1. \end{cases}$$

3. Montrer que la limite d'une suite matrices unitaires est unitaire.

Description de la méthode. A partir de $A \in M_n(\mathbb{C})$, on définit une suite de matrices $(A_k)_{k \geq 1}$ comme suit. Posant $A_1 = A$, le successeur A_{k+1} de A_k , $k \geq 1$, s'obtient en :

- (i) Ecrivant la factorisation QR de A_k , $A_k = Q_k R_k$.
- (ii) Formant ensuite la matrice $A_{k+1} = R_k Q_k$.

Pour tout $k \geq 1$, on vérifie que :

$$A_{k+1} = q_k^* A q_k \text{ et } A^k = q_k r_k \text{ où } q_k = Q_1 Q_2 \dots Q_k \text{ et } r_k = R_k R_{k-1} \dots R_1.$$

Convergence de la méthode. On suppose que A est inversible et que toutes ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, sont de modules différents :

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0. \quad (2)$$

La matrice A est donc diagonalisable : il existe P inversible telle que $A = P \Lambda P^{-1}$ avec $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$. On suppose de plus que P^{-1} possède une factorisation LU : il existe L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure telles que :

$$P^{-1} = LU, \text{ avec } (L)_{ii} = 1, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

On va démontrer que

$$\begin{cases} (A_k)_{ii} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \lambda_i, & 1 \leq i \leq n \\ (A_k)_{ij} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0, & 1 \leq j < i \leq n. \end{cases} \quad (4)$$

1. Montrer à partir de (2) que $\Lambda^k L \Lambda^{-k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} I$.
2. Posant $E_k = \Lambda^k L \Lambda^{-k} - I$ et notant $P = QR$ l'unique factorisation QR de P telle que $(R)_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, déduire de ce qui précède qu'il existe $k_0 \geq 1$ tel que $I + R E_k R^{-1}$ est inversible pour tout $k \geq k_0$.
3. *Deuxième décomposition QR de A^k .*
Pour $k \geq k_0$, on note $\tilde{Q}_k \tilde{R}_k$ l'unique décomposition QR de $I + R E_k R^{-1}$ telle que $(\tilde{R}_k)_{ii} > 0$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$.
 - (a) En utilisant (3), montrer que $A^k = (Q \tilde{Q}_k)(\tilde{R}_k R \Lambda^k U)$ pour tout $k \geq k_0$.
 - (b) En déduire qu'il existe une matrice D_k diagonale vérifiant $|(D_k)_{ii}| = 1$, telle que $q_k = Q \tilde{Q}_k D_k$ et $r_k = D_k^{-1} \tilde{R}_k R \Lambda^k U$.

4. Comportement asymptotique de $(\tilde{Q}_k)_k$ et $(\tilde{R}_k)_k$.

(a) On va montrer que la suite $(\tilde{Q}_k)_k$ a I pour unique valeur d'adhérence.

(i) Justifier l'existence d'une sous-suite $(\tilde{Q}_{\varphi(k)})_k$ de $(\tilde{Q}_k)_k$ qui converge (et dont la limite sera notée \tilde{Q}).

(ii) Montrer que $(\tilde{R}_{\varphi(k)})_k$ converge vers une matrice triangulaire \tilde{R} .

(iii) Montrer alors que $\tilde{Q} = \tilde{R} = I$.

(iv) Conclure.

(b) En déduire que $\tilde{R}_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} I$ et $\tilde{Q}_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} I$.

5. Montrer pour tout $k \geq 1$ que $A_{k+1} = D_k^* \Omega_k D_k$ où $\Omega_k = \tilde{Q}_k^* R \Lambda R^{-1} \tilde{Q}_k$.

6. Démontrer enfin les relations de (4).

3.7 Rappels sur la factorisation QR d'une matrice

Préliminaire : matrices de Householder. A tout vecteur $v \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ on associe la matrice de Householder :

$$H(v) = I - 2 \frac{vv^*}{v^*v} = I - \frac{2}{\|v\|^2} vv^*,$$

où $\|v\| = \|v\|_2$ est la norme hermitienne de v .

(a) Vérifier que $H(v)$ est hermitienne et unitaire.

(b) Etant donné $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ un vecteur de \mathbb{C}^n (la famille $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ désignant la base canonique de \mathbb{C}^n) tel que $x_1 = e^{i\theta} |x_1| \neq 0$ et $\sum_{i=2}^n |x_i| > 0$, vérifier que

$$H(x \mp \|x\| e^{i\theta} e_1)x = \pm \|x\| e^{i\theta} e_1.$$

Principe de la méthode. Soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in M_n(\mathbb{C})$. L'idée est de trouver $n-1$ matrices de Householder H_1, H_2, \dots, H_{n-1} telle que $H_{n-1} \dots H_2 H_1 A$ soit triangulaire supérieure.

Construction de H_1 . La matrice H_1 doit permettre de "faire apparaître des zéros" à la place des $n-1$ dernières composantes de la première colonne $a_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n1}) \in \mathbb{C}^n$ de la matrice A :

$$A_2 = H_1 A_1 = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

(a) Si $\sum_{i=2}^n |a_{i1}| > 0$, alors il existe $w_1 \in \mathbb{C}^n$ tel que $H_{w_1}^{(n)} a_1$ a toutes ses composantes nulles à l'exception de la première. Ainsi $H_1 = H_{w_1}^{(n)}$ convient.

(b) Si $\sum_{i=2}^n |a_{i1}| = 0$, alors il suffit de choisir $H_1 = I_n$.

Construction de H_2 . Soit $a_2 = (a_{22}^{(2)}, a_{32}^{(2)}, \dots, a_{n2}^{(2)})$ le vecteur de \mathbb{C}^{n-1} formé par les $n-1$ dernières composantes de la deuxième colonne de A_2 .

- (a) Si $\sum_{i=3}^n |a_{i2}^{(2)}| > 0$, il existe $\tilde{w}_2 \in \mathbb{C}^{n-1}$ tel que $H_{\tilde{w}_2}^{(n-1)} a_2$ a toutes ses composantes nulles à l'exception de la première. On pose alors :

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H_{\tilde{w}_2}^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

En notant w_2 le vecteur de \mathbb{C}^n dont la première composante est nulle et les $n - 1$ dernières sont celles de \tilde{w}_2 , vérifier que :

$$H_2 = H_{w_2}^{(n)}.$$

- (b) Si $\sum_{i=3}^n |a_{i2}^{(2)}| = 0$, on pose $H_2 = I_n$.

Vérifier que dans les deux cas, on obtient :

$$A_3 = H_2 A_2 = \begin{pmatrix} * & * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & \dots & * \\ 0 & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Décrire ensuite l'étape k , $k \geq 3$ de cette méthode.

Décomposition QR. Montrer que :

1. Il existe une matrice unitaire Q et une matrice triangulaire R telles que $A = QR$.
2. On peut s'arranger pour que les éléments diagonaux de R soient tous ≥ 0 .
3. Si A est inversible, la factorisation QR est unique.

Indication : pour cette question, on rappelle (factorisation de Cholesky) que toute matrice à coefficients complexes H , hermitienne définie positive se met sous la forme

$$H = TT^*, \text{ où } T \text{ est une matrice triangulaire.}$$

De plus, on peut s'arranger pour que les coefficients diagonaux de T soient tous > 0 , auquel cas la matrice T est unique.