C. R. Acad. Sci. Paris, t. 329, Série I, p. 91-96, 1999
Problèmes mathématiques de la mécanique/*Mathematical Problems in Mechanics*

Analyticité des courbes de dispersion et principe d'absorption limite pour l'opérateur de Maxwell

Eric SOCCORSI

IUT-GTR, Université de la Méditerranée, 163, avenue de Luminy, 13288 Marseille, France
& Laboratoire d'analyse, de topologie et de probabilités, UMR CNRS 6632, Marseille
Courriel : soccorsi@iut-gtr.univ-mrs.fr

(Reçu le 15 janvier 1999, accepté après révision le 11 mai 1999)

Résumé. Dans un guide d'ondes, l'opérateur de Maxwell elliptique d'ordre 2, noté M, est une intégrale directe d'opérateurs M_p, $p \in \mathbb{R}$, formant une famille holomorphe auto-adjointe. Cette famille n'est pas de type (B) au sens de Kato (*voir* [4]). En dépit de ce phénomène, inobservé en acoustique comme en élasticité, on montre que les courbes de dispersion de l'opérateur M sont analytiques réelles. Et bien que leur éventuelle monotonie sur $\mathbb{R}_\pm^*$ ne soit pas connue, cette propriété d'analyticité joue un rôle essentiel dans l'établissement d'un principe d'absorption limite au voisinage des seuils de l'opérateur M. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Analyticity of the dispersion curves and limiting absorption principle for Maxwell operator

Abstract. *In a wave guide, the elliptic second order Maxwell operator M, is a direct integral along $\mathbb{R}$, whose operators define an holomorphic selfadjoint family. But, this family is not of type* (B) *in Kato's sense* (see [4]). *In spite of this phenomenon, which appears neither in acoustics nor in elasticity, we prove that the dispersion curves of M are real analytic. Then, a limiting absorption principle for operator M is deduced in a neighborhood of its thresholds, without any assumption of monotony of its dispersion curves on $\mathbb{R}_\pm^*$.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Abridged English Version

We consider an infinite cylindrical wave guide whose cross section Ω_T is a bounded connected and simply connected open subset of $\mathbb{R}^2$ with a Lipschitz-continuous boundary. The boundary condition is imposed by the perfectly conducting guide and the permittivity ε together with the permeability μ of the propagation medium $\Omega = \Omega_T \times \mathbb{R}$ are real measurable and strictly positive functions that depend only on the cross variables $x_T = (x_1, x_2)$. We suppose in addition that $\varepsilon^{\pm 1}$ and $\mu^{\pm 1}$ belong to $\mathrm{L}^\infty(\Omega_T)$.

Note présentée par Évariste SANCHEZ-PALENCIA.

0764-4442/99/03290091

A stationnary approach of this wave guide leads to examine the elliptic second order Maxwell operator M. It is selfadjoint in the Hilbertian space $\mathrm{H}_\varepsilon = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega)^3,\ \mathrm{div}\,(\varepsilon u) = 0\}$ endowed with the $\mathrm{L}^2(\Omega; \varepsilon\, \mathrm{d}x_T\, \mathrm{d}x_3)^3$ scalar product, and is defined by:

$$\begin{cases} D(M) = \{u \in \mathrm{H}(\mathrm{curl}; \Omega) \cap \mathrm{H}_\varepsilon\ ;\ \gamma_\tau\, u = 0,\ \mu^{-1}\mathrm{curl}\, u \in \mathrm{H}(\mathrm{curl}; \Omega)\}, \\ \forall\, u \in D(M),\ \ Mu = \varepsilon^{-1}\, \mathrm{curl}\,(\mu^{-1}\mathrm{curl}\, u), \end{cases}$$

where $\mathrm{H}(\mathrm{curl}; \Omega)$ is $\{u \in \mathrm{L}^2(\Omega)^3,\ \mathrm{curl}\, u \in \mathrm{L}^2(\Omega)^3\}$ and γ_τ is the unique linear continuous application from $\mathrm{H}(\mathrm{curl}; \Omega)$ in $\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)^3$ such that $\gamma_\tau\, u = u \wedge \mathrm{n}_{\partial\Omega}$ for every $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\overline{\Omega})^3$.

The partial Fourier transform with respect to the infinite direction shows that M is unitarily equivalent to the direct integral along $\mathbb{R}$ of operators M_p, where, for every real p, M_p is a selfadjoint linear operator with compact resolvent in $\mathrm{H}_{\varepsilon,p} = \{v \in \mathrm{L}^2(\Omega_T)^3,\ \partial_{x_1}(\varepsilon v_1) + \partial_{x_2}(\varepsilon v_2) - ip\varepsilon v_3 = 0\}$. However, the holomorphic selfadjoint family $\{M_p,\ p \in \mathbb{C}\}$ defined by these reduced operators, is not of type (B) in Kato's sense (*see* [4]) because the domain of the sesquilinear form m_p associated to operator M_p is included in $\mathrm{H}_{\varepsilon,p}$ and also depends on p. Note that this phenomenon does not appear in acoustics (*see* [3]) or in elasticity (*see* [2]). But, the linear operator $L = M \oplus \underline{0}$ associated to the orthogonal Weyl–Hodge decomposition $\mathrm{L}^2(\Omega; \varepsilon\, \mathrm{d}x_T\, \mathrm{d}x_3)^3 = \mathrm{H}_\varepsilon \oplus \nabla \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ can be written $L = \displaystyle\int_{p\in\mathbb{R}}^{\oplus} L_p\, \mathrm{d}p$, where $\{L_p,\ p \in \mathbb{R}\}$ defines a selfadjoint holomorphic family of type (B) with $\sigma(M_p) = \sigma_p(L_p)$ and $\sigma_{\mathrm{ess}}(L_p) = \{0\}$ for any $p \in \mathbb{R}$. Moreover, according to [6], the continuous spectrum of L_p does not vanish in the essential spectrum. So, we deduce from Remark 4.22 and Theorem 3.9 of [4] that the dispersion curves $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ are real analytic.

But, as in the acoustic case (*see* [1] or [3]), it is not proved that these functions are monotone on $\mathbb{R}_\pm^*$. Therefore, we define the thresholds of M as the stationnary points $\lambda_j^n = \lambda_n(p_j^n)$, $j \in J_n \subset \mathbb{Z}$, of $p \mapsto \lambda_n(p)$ for any $n \in \mathbb{N}^*$, each p_j^n being a zero of order N_j^n of the derivatives λ_n'. Then, $\{\lambda_j^n,\ j \in J_n\}$ is a discrete subset of $\mathbb{R}$ and this approach generalizes the common definition of the thresholds of the acoustic operator used in [3]. Moreover, we describe in [6] a unitary transform $\mathcal{U}$ from H_ε onto $W = \bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ such that $\mathcal{U}\mathcal{M}\mathcal{U}^*$ is the multiplication operator by $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ in W. We also deduce from [2] that $\sigma(M) = \overline{\{\lambda_n(p),\ p \in \mathbb{R},\ n \geq 1\}}$ is absolutely continuous.

Now, for any real s, consider the Hilbertian space

$$\mathrm{H}_\varepsilon^s = \mathrm{H}_\varepsilon \cap \{u \text{ is measurable, } (x_T, x_3) \mapsto (1 + x_3^2)^{s/2} u(x_T, x_3) \in \mathrm{L}^2(\Omega)^3\}$$

for the scalar product of $\mathrm{L}^2(\Omega;\ \varepsilon(1+x_3^2)^s\, \mathrm{d}x_T\, \mathrm{d}x_3)^3$. When $s > 0$, the imbeddings $\mathrm{H}_\varepsilon^{-s} \hookrightarrow \mathrm{H}_\varepsilon \hookrightarrow \mathrm{H}_\varepsilon^s$ are continuous and the resolvent operator $z \mapsto R_M(z) = (M - z)^{-1}$ is also analytic from $\mathbb{C} \setminus \overline{\sigma(M)}$ into $\mathrm{B}(\mathrm{H}_\varepsilon^s, \mathrm{H}_\varepsilon^{-s})$. From now on, set $s > \frac{1}{2}$ and let f and g belong to H_ε^s. Then, $h_n : p \mapsto (\mathcal{U}f)_n(p)\overline{(\mathcal{U}g)_n(p)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, is δ-Hölder continuous for any $\delta \in [0, 1]$ such that $\delta < s - \frac{1}{2}$, and, the spectral theory yields in the usual case

$$(R_M(z)f, g)_{\mathrm{H}_\varepsilon} = \sum_{n\geq 1} \sum_{j\in J_n} \int_{I_j^n} \frac{\phi_j^n(\lambda)}{\lambda - z}\, \mathrm{d}\lambda \ \text{ with } \ \phi_j^n(\lambda) = \frac{(h_n \circ \xi_j^n)(\lambda)}{(\lambda_n' \circ \xi_j^n)(\lambda)},$$

where ξ_j^n denotes the inverse function of the analytic diffeomorphism λ_n from $]p_j^n, p_{j+1}^n[$ onto $I_j^n = \lambda_n(]p_j^n, p_{j+1}^n[)$.

Next, the asymptotic behaviours of $p \mapsto \lambda_n(p)$, $n \geq 1$, and $n \mapsto \inf_{p\in\mathbb{R}} \lambda_n(p)$ combined with the Korn–Privaloff theorem about singular integrals (*see* [5]) prove that the resolvent operator $z \mapsto (M - z)^{-1}$

can be extended continuously in the $B(H^s_{\varepsilon}, H^{-s}_{\varepsilon})$-topology to the lower or upper complex half-planes, except at the thresholds. Moreover, this continuity holds at any threshold τ when every function $h_n \circ \xi^n_j$, for $n \in \mathbb{N}^*$ and $j \in J_n$ such that $\lambda^n_j = \tau$, has a zero of order N^n_j at $\lambda = \tau$. Indeed, the corresponding functions ϕ^n_j also remain locally Hölder continuous in a neighborhood of τ, and the continuous extension of the resolvent operator appears, as in [6], as a corollary of the Korn–Privaloff theorem.

---

1. Introduction

Soit Ω_T un ouvert borné, connexe et simplement connexe de $\mathbb{R}^2$, de frontière Γ_T lipschitzienne. Si le guide d'ondes $\Gamma = \Gamma_T \times \mathbb{R}$ de normale extérieure n_Γ est parfaitement conducteur, le champ électrique u qui se propage dans le milieu continu $\Omega = \Omega_T \times \mathbb{R}$ de permittivité ε et de perméabilité μ, est régi par les équations de Maxwell. Il vérifie donc :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(x,t) - \mathcal{M}u(x,t) = 0, & (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^*_+, \\ \operatorname{div}(\varepsilon u)(x,t) = 0, & (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^*_+, \\ u(\sigma,t) \wedge n_\Gamma(\sigma) = 0, & (\sigma,t) \in \Gamma \times \mathbb{R}^*_+, \end{cases}$$

$\mathcal{M}$ étant l'opérateur formel défini par $\mathcal{M}u = \varepsilon^{-1}\operatorname{rot}(\mu^{-1}\operatorname{rot} u)$. Lorsque ε et μ sont des fonctions de $x_T = (x_1, x_2) \in \Omega_T$ à valeurs réelles strictement positives, telles que $\varepsilon^{\pm 1}$ et $\mu^{\pm 1}$ appartiennent à $L^\infty(\Omega_T)$, $\mathcal{M}$ possède une représentation auto-adjointe elliptique dans l'espace de Hilbert $H_\varepsilon = \{u \in L^2(\Omega)^3, \ \operatorname{div}(\varepsilon u) = 0\}$ muni du produit scalaire de $L^2(\Omega; \varepsilon\, dx_T\, dx_3)^3$. Cette représentation, M, est définie par :

$$\begin{cases} D(M) = \{u \in H(\operatorname{rot}; \Omega) \cap H_\varepsilon \,;\ \gamma_\tau u = 0,\ \mu^{-1}\operatorname{rot} u \in H(\operatorname{rot}; \Omega)\}, \\ \forall u \in D(M),\ Mu = \mathcal{M}u, \end{cases}$$

où $H(\operatorname{rot}; \Omega)$ désigne le sous-espace $\{u \in L^2(\Omega)^3, \ \operatorname{rot} u \in L^2(\Omega)^3\}$ de $L^2(\Omega)^3$, et γ_τ l'unique application linéaire continue de $H(\operatorname{rot}; \Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)^3$ telle que $\gamma_\tau u = u \wedge n_\Gamma$ pour tout $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})^3$.

2. Analyse spectrale de M

La transformée de Fourier partielle dans la direction infinie x_3 établit que M est l'intégrale directe sur $\mathbb{R}$ d'opérateurs M_p, où, pour chaque réel p, l'opérateur réduit M_p est auto-adjoint, strictement positif et à résolvante compacte dans $H_{\varepsilon,p} = \{v \in L^2(\Omega_T)^3, \ \partial_{x_1}(\varepsilon v_1) + \partial_{x_2}(\varepsilon v_2) - ip\varepsilon v_3 = 0\}$. Ainsi, le spectre de M_p est discret et s'écrit $\sigma(M_p) = \{\Lambda_n(p), \ n \in \mathbb{N}^*\}$ avec

$$0 < \Lambda_1(p) \le \Lambda_2(p) \le \cdots \le \Lambda_n(p) \le \cdots < \infty,$$

chaque fonction $p \mapsto \Lambda_n(p)$, $n \in \mathbb{N}^*$, étant paire et dérivable $\mathbb{R}$-presque partout. De plus, la famille $\{M_p, \ p \in \mathbb{C}\}$ engendrée par les opérateurs réduits est holomorphe. Mais elle n'est pas de type (B) au sens de Kato, car le domaine de la forme sesqui-linéaire m_p associée à M_p est inclus dans $H_{\varepsilon,p}$, donc dépend du réel p. En dépit de ce comportement atypique (si l'on se réfère aux opérateurs acoustique – *voir* [3] – ou élastique – *voir* [2] – notamment), les courbes de dispersion de M peuvent tout de même être choisies analytiques.

PROPOSITION 1. – *Il existe deux familles* $\{\lambda_n(p), \ n \in \mathbb{N}^*\}$ *et* $\{\varphi_n(p), \ n \in \mathbb{N}^*\}$ *analytiques par rapport à* p *sur* $\mathbb{R}$, *telles que, pour chaque* $p \in \mathbb{R}$:

- $\sigma(M_p) = \{\lambda_n(p),\ n \in \mathbb{N}^*\}$ *et* $\varphi_n(p)$, $n \in \mathbb{N}^*$, *est vecteur propre de* M_p *associé à la valeur propre* $\lambda_n(p)$ *;*
- $\{\varphi_n(p),\ n \in \mathbb{N}^*\}$ *est une base orthonormale de* $\mathrm{H}_{\varepsilon,p}$.

Démonstration. – L'opérateur $L = M \oplus \underline{0}$ associé à la décomposition orthogonale de Weyl–Hodge $\mathrm{L}^2(\Omega; \varepsilon\, \mathrm{d}x_T\, \mathrm{d}x_3)^3 = \mathrm{H}_\varepsilon \oplus \nabla \mathrm{H}_0^1(\Omega)$, est auto-adjoint dans $\mathrm{L}^2(\Omega; \varepsilon\, \mathrm{d}x_T\, \mathrm{d}x_3)^3$. Il se met sous la forme $L = \int_{p\in\mathbb{R}}^{\oplus} L_p\, \mathrm{d}p$, où $\{L_p,\ p \in \mathbb{R}\}$ engendre une famille holomorphe auto-adjointe de type (B) dans $\mathrm{L}^2(\Omega_T; \varepsilon\, \mathrm{d}x_T)^3$, telle que pour tout $p \in \mathbb{R}$, $\sigma(M_p) = \sigma_p(L_p)$ et $\sigma_{\mathrm{ess}}(L_p) = \{0\}$. Ensuite, comme cela est démontré dans [6], l'ellipticité du système $\mathrm{div}_T - \mathrm{rot}_T$ (où $\mathrm{rot}_T u_T = \partial_{x_1} u_2 - \partial_{x_2} u_1$ et $\mathrm{div}\, T u_T = \partial_{x_1} u_1 + \partial_{x_2} u_2$) assure que $\sigma_p(L_p)$ ne peut être infiniment proche de 0. Le résultat se déduit alors de la remarque 4.22 et du théorème 3.9 de [4]. $\square$

Mais contrairement à ce qui a lieu en acoustique (*voir* [1] et [3]), l'éventuelle monotonie des courbes de dispersion $p \mapsto \lambda_n(p)$, $n \in \mathbb{N}^*$, est toujours un problème ouvert. Ainsi, la dérivée λ_n' admet a priori un ensemble discret de zéros p_j^n de multiplicité $N_j^n \geq 1$, pour $j \in J_n \subset \mathbb{Z}$. Autrement dit, λ_n est un difféomorphisme analytique de $]p_j^n, p_{j+1}^n[$ sur $I_j^n = \lambda_n(]p_j^n, p_{j+1}^n[)$. On note ξ_j^n sa fonction réciproque. L'ensemble des seuils de M est donc $\mathcal{S} = \{\lambda_j^n = \lambda_n(p_j^n),\ n \geq 1,\ j \in J_n\}$, ce qui généralise la définition communément adoptée en acoustique, comme dans [3] par exemple.

Ensuite, l'égalité $M = \int_{\mathbb{R}}^{\oplus} M_p\, \mathrm{d}p$ assure que

$$\phi_n(p) : (x_T, x_3) \mapsto (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \varphi_n(x_T)\, \mathrm{e}^{ipx_3}, \quad (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R},$$

forment un système complet de fonctions propres généralisées de M dans H_ε. En effet, $\phi_n(p)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{R}$, appartient à

$$D(M)_{\mathrm{loc}} = \{u,\ (x_T, x_3) \mapsto \psi(x_3) u(x_T, x_3) \in D(M),\quad \forall \psi \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R})\}$$

et vérifie formellement $M\phi_n(p) = \lambda_n(p)\phi_n(p)$. De plus, pour tout $f \in \mathrm{H}_\varepsilon$,

$$X \longmapsto \int_{\{(x_T,x_3)\in\Omega,\ |x_3|<X\}} \varepsilon(x_T)\big(f(x_T,x_3), (\phi_n(p))(x_T,x_3)\big)_{\mathbb{C}^3}\, \mathrm{d}x_T\, \mathrm{d}x_3$$

admet une limite $\tilde{f}_n(p)$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, lorsque X tend vers l'infini. Celle-ci définit une transformation unitaire $\mathcal{U} : f \mapsto (\tilde{f}_n)_{n\geq 1}$ de H_ε sur $\bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, qui « réduit » M, puisque $\mathcal{U}\mathcal{M}\mathcal{U}^*$ est l'opérateur de multiplication dans $\bigoplus_{n\geq 1} \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ par la famille $(\lambda_n)_{n\geq 1}$. Il résulte ainsi de [2] que $\sigma(M) = \overline{\{\lambda_n(p),\ p \in \mathbb{R},\ n \geq 1\}}$ est absolument continu.

3. Principe d'absorption limite pour M

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'intersection

$$\mathrm{H}_\varepsilon^s = \mathrm{H}_\varepsilon \cap \{u \text{ mesurable},\ (x_T, x_3) \mapsto (1 + x_3^2)^{s/2} u(x_T, x_3) \in \mathrm{L}^2(\Omega)^3\},$$

munie du produit scalaire de $\mathrm{L}^2(\Omega; \varepsilon(1 + x_3^2)^s\, \mathrm{d}x_T\, \mathrm{d}x_3)^3$ est un espace de Hilbert. Comme les injections $\mathrm{H}_\varepsilon^{-s} \hookrightarrow \mathrm{H}_\varepsilon \hookrightarrow \mathrm{H}_\varepsilon^s$ sont continues lorsque $s > 0$, l'opérateur $z \mapsto R_M(z) = (M - z)^{-1}$ est analytique de $\mathbb{C} \setminus \sigma(M)$ dans $\mathrm{B}(\mathrm{H}_\varepsilon^s, \mathrm{H}_\varepsilon^{-s})$. Fixons désormais $s > \frac{1}{2}$. Alors, si f et g appartiennent à

H^s_ε, la fonction $h_n : p \mapsto \tilde{f}_n(p)\overline{\tilde{g}_n(p)}$, $n \in \mathbb{N}^*$, est δ-höldérienne pour tout $\delta \in [0,1]$ tel que $\delta < s - \frac{1}{2}$, et la théorie spectrale impose dans le cas général :

$$\forall z \in \mathbb{C} \smallsetminus \sigma(M), \quad (R_M(z)f, g)_{\mathrm{H}_\varepsilon} = \sum_{n\geq 1}\sum_{j\in J_n}\int_{I_j^n}\frac{\phi_j^n(\lambda)}{\lambda - z}\,\mathrm{d}\lambda \text{ avec } \phi_j^n(\lambda) = \frac{(h_n \circ \xi_j^n)(\lambda)}{(\lambda_n' \circ \xi_j^n)(\lambda)}.$$

Mais le comportement asymptotique des courbes de dispersion décrit dans [6],

$$\lim_{|p|\to+\infty} \lambda_n(p) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{p\in\mathbb{R}} \lambda_n(p)\right) = +\infty,$$

montre que, pour tout z pris dans un sous-ensemble compact K de $\mathbb{C}$, $\lambda - z$ ne s'annule jamais sur I_j^n, sauf éventuellement pour un nombre fini de couples (n,j) formant un ensemble Z_K. Ainsi,

$$z \longmapsto \sum_{(n,j)\notin Z_K}\int_{I_j^n}\frac{\phi_j^n(\lambda)}{\lambda - z}\,\mathrm{d}\lambda$$

est lipschitzienne sur $\mathbb{C}$. En revanche, ce n'est plus vrai lorsque $(n,j) \in Z_K$, et deux cas doivent alors être pris en compte.

1^er^ cas : *K est un compact de $\mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{S}$.* – La fonction ϕ_j^n est alors δ-höldérienne car ξ_j^n est lipschitzienne en dehors des seuils, ce qui autorise l'usage du théorème de Korn–Privaloff sur les intégrales singulières démontré dans [5], afin d'en déduire (*voir* [6]) un « principe d'absorption limite en dehors des seuils » :

THÉORÈME 1. – *Pour tout compact K de $\mathbb{C} \smallsetminus \mathcal{S}$, la fonction $z \mapsto R_M(z)$ définie sur $K \cap \mathbb{C}^{\pm}$, se prolonge continûment à $K \cap \overline{\mathbb{C}^{\pm}}$ en une fonction δ-höldérienne pour tout $\delta \in [0,1]$ tel que $\delta < s - \frac{1}{2}$, en ce sens qu'il existe $c = c(s,\delta,K)$ tel que*

$$\left\|R_M^{\pm}(z') - R_M^{\pm}(z)\right\|_{\mathrm{B}(\mathrm{H}^s_\varepsilon, \mathrm{H}^{-s}_\varepsilon)} \leq c\,|z' - z|^\delta, \quad \forall z, z' \in K \cap \overline{\mathbb{C}^{\pm}}.$$

De plus, pour tout f et g de H^s_ε, on a, pour chaque $\tau \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathcal{S}$:

$$\lim_{\substack{z\to\tau \\ \pm \mathrm{Im}(z)>0}} (R_M^{\pm}(z)f, g)_{\mathrm{H}_\varepsilon} = \sum_{n\geq 1}\left\{\text{v.p.}\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{h_n(p)}{\lambda_n(p) - \tau}\,\mathrm{d}p\right) \pm i\pi \sum_{q\in\lambda_n^{-1}(\{\tau\})}\frac{h_n(q)}{|\lambda_n'(q)|}\right\}.$$

2^ème^ cas : *K contient éventuellement un seuil.* – Au voisinage d'un seuil $\lambda_j^n \in K$, la fonction ϕ_j^n possède a priori un pôle de multiplicité N_j^n. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\tilde{f}_n$ appartient à $\mathrm{C}^{k-1}(\mathbb{R})$ dès que $f \in \mathrm{H}^s_\varepsilon$ et $s > k - \frac{1}{2}$. Ceci permet de définir le sous-espace fermé

$$\mathrm{NH}^s_\varepsilon(n,j,k) = \left\{f \in \mathrm{H}^s_\varepsilon,\ \frac{\mathrm{d}^\alpha \tilde{f}_n}{\mathrm{d}p^\alpha}(p_j^n) = 0,\ \forall \alpha = 0, 1, \ldots, k-1\right\}$$

de H^s_ε, et, comme ξ_j^n est $\frac{1}{N_j^n+1}$-höldérienne au voisinage de λ_j^n, on vérifie pour chaque entier $k \in \{1, \ldots, N_j^n\}$, que les choix de $f \in \mathrm{NH}^s_\varepsilon(n,j,k)$ et de $g \in \mathrm{NH}^{s'}_\varepsilon(n,j,N_j^n+1-k)$ avec $s > k - \frac{1}{2}$ et $s' > N_j^n - k + \frac{1}{2}$ tels que $s + s' > N_j^n + 1$, garantissent que ϕ_j^n est höldérienne au voisinage de λ_j^n. Ainsi, pour tout réel τ de $\mathcal{S}$ auquel est associé l'ensemble $Z_\tau = \{(n,j) \in \mathbb{N}^* \times J_n,\ \lambda_j^n = \tau\}$, pour tout multi-indice $\underline{k} = \left(k_j^n\right)_{(n,j)\in Z_\tau} \in (\mathbb{N}^*)^{Z_\tau}$ de module $|\underline{k}| = \max_{(n,j)\in Z_\tau} k_j^n$, ainsi que pour tout réel $s > |\underline{k}| - \frac{1}{2}$, l'intersection

$$\mathrm{NH}_\varepsilon^s(\tau, \underline{k}) = \bigcap_{(n,j)\in Z_\tau} \mathrm{NH}_\varepsilon^s(n, j, k_j^n)$$

forme un espace de Hilbert au sens de la topologie de H_ε^s, dans lequel le théorème de Korn–Privaloff s'applique à nouveau. On obtient ainsi (*voir* [6]) un « principe d'absorption limite aux seuils » :

THÉORÈME 2. – *Soient $\tau \in \mathcal{S}$ et K un compact de $(\mathbb{C} \setminus \mathcal{S}) \cup \{\tau\}$. Quel que soit le multi-indice $\underline{a} = (a_j^n)_{(n,j)\in Z_K}$ tel que $a_j^n \in \{1, 2, \ldots, N_j^n\}$, on pose $\underline{b} = (N_j^n + 1 - a_j^n)_{(n,j)\in Z_K}$ et on considère deux réels $s > |\underline{a}| - \frac{1}{2}$ et $s' > |\underline{b}| - \frac{1}{2}$ tels que $s + s' > |\underline{N}| + 1$.*

Alors la fonction $z \mapsto R_M(z)$ définie sur $K \cap \mathbb{C}^\pm$ se prolonge continûment à $K \cap \overline{\mathbb{C}^\pm}$ en une fonction $R_M^\pm$, qui est $\frac{\theta}{|\underline{N}|+1}$-höldérienne pour tout $\theta \in \left[0, \frac{t+t'-1}{2}\right[$, où $t = \min\left(1, s - |\underline{a}| + \frac{1}{2}\right)$ et $t' = \min\left(1, s' - |\underline{b}| + \frac{1}{2}\right)$. Plus précisément, il existe $c = c(s, s', \theta, K)$ tel que

$$\left\|R_M^\pm(z') - R_M^\pm(z)\right\|_{\mathrm{B}(\mathrm{NH}_\varepsilon^s(\tau,\underline{a}),(\mathrm{NH}_\varepsilon^{s'}(\tau,\underline{b}))')} \leq c\,|z' - z|^{\theta/(|\underline{N}|+1)}, \quad \forall z, z' \in K \cap \overline{\mathbb{C}^\pm}.$$

Enfin, pour tout f et g de H_ε^s, on a :

$$\lim_{\substack{z\to\tau \\ \pm\mathrm{Im}(z)>0}} \left(R_M^\pm(z)f, g\right)_{\mathrm{H}_\varepsilon} = \sum_{n\geq 1} \left\{ \mathrm{v.p.}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{h_n(p)}{\lambda_n(p) - \tau}\,\mathrm{d}p\right) \pm i\pi \sum_{q\in\lambda_n^{-1}(\{\tau\}),\lambda_n'(q)\neq 0} \frac{h_n(q)}{|\lambda_n'(q)|} \right\}.$$

Références bibliographiques

[1] Ben-Artzi M., Dermenjian Y., Guillot J.-C., Acoustic waves in perturbed media: a spectral study, Commun. Partial Differ. Eq. 14 (1989) 479–517.

[2] Bouhennache T., Étude d'une bande élastique multistratifiée : analyse spectrale et principe d'absorption limite, Thèse, Université de Provence, 1997.

[3] Croc E., Dermenjian Y., Analyse spectrale d'une bande élastique multistratifiée 1 : principe d'absorption limite pour une stratification simple, SIAM J. Math. Anal. 26 (1995) 880–924.

[4] Kato T., Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, 1996.

[5] Muskhelishvili N.I., Singular integral equations, Dover publications, 1992.

[6] Soccorsi E., Étude mathématique de la propagation des ondes électromagnétiques dans des milieux irréguliers : analyse spectrale et principe d'absorption limite, Thèse, Université de Provence, 1998.